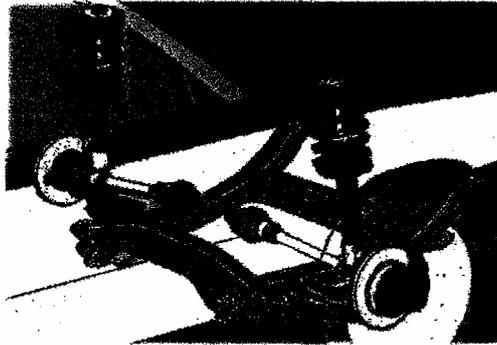


**P. Agati Y. Brémont G. Delville**

DEUG TI • IUT • STS

# **Mécanique du solide**

## **Applications industrielles**



DUNOD

N° 03

# 3 hyperstatisme et mobilité des mécanismes

Pour maîtriser le comportement d'un mécanisme (afin, par exemple, d'obtenir une précision voulue de mise en position d'une pièce par rapport à une autre, ou d'éviter une usure prématurée, un coincement, ou un montage impossible) il faut connaître précisément la position relative de chaque liaison, ainsi que les torseurs d'action mécanique correspondants.

L'objectif de ce chapitre est donc :

- de localiser, quand elles existent, les inconnues de liaison (inconnues hyperstatiques) que l'on ne peut pas déterminer uniquement par application du principe fondamental de la statique (ou de la dynamique) à ce mécanisme,
- de proposer, éventuellement, des modifications pour rendre le mécanisme isostatique (sans inconnue hyperstatique),
- de savoir à quelles conditions géométriques de position relative des liaisons correspondent les inconnues hyperstatiques.

## 1 HYPOTHESES DE L'ETUDE

Les résultats que nous allons mettre en place seront valables pour :

- des pièces modélisées par des solides indéformables,
- des liaisons sans frottement,
- des liaisons à contact bilatéral, c'est-à-dire des liaisons dans lesquelles le contact est supposé maintenu si le sens des actions mécaniques est inversé. Cette hypothèse concerne essentiellement les liaisons ponctuelle, linéique rectiligne et appui-plan.

De plus, pour simplifier l'étude, nous supposons que toutes les pièces sont de masse nulle, de façon que, les effets d'inertie étant nuls, on puisse écrire pour tout sous-ensemble ( $e$ ) de pièces d'un mécanisme :

$$\{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\} = \{\bar{0}\}.$$

## 2 GRAPHE DES LIAISONS D'UN MÉCANISME

Dans le graphe des liaisons d'un mécanisme les solides sont schématisés par des cercles et les liaisons par des arcs de courbe joignant ces cercles.

### Application

Dans le montage d'usinage représenté *figure 1*, les liaisons entre les différents solides sont les suivantes :

- (L<sub>1</sub>) : Glissière de direction  $\bar{x}$  ;
- (L<sub>2</sub>) : Appui-plan de normale  $\bar{x}$  ;
- (L<sub>3</sub>) : Glissière hélicoïdale d'axe (O,  $\bar{x}$ ) ;
- (L<sub>4</sub>) : Pivot glissant d'axe (O,  $\bar{y}$ ) (vé long) ;
- (L<sub>5</sub>) : Linéique rectiligne d'axe (I,  $\bar{y}$ ), de normale  $\bar{x}$  ;
- (L<sub>6</sub>) : Appui-plan de normale  $\bar{y}$ .

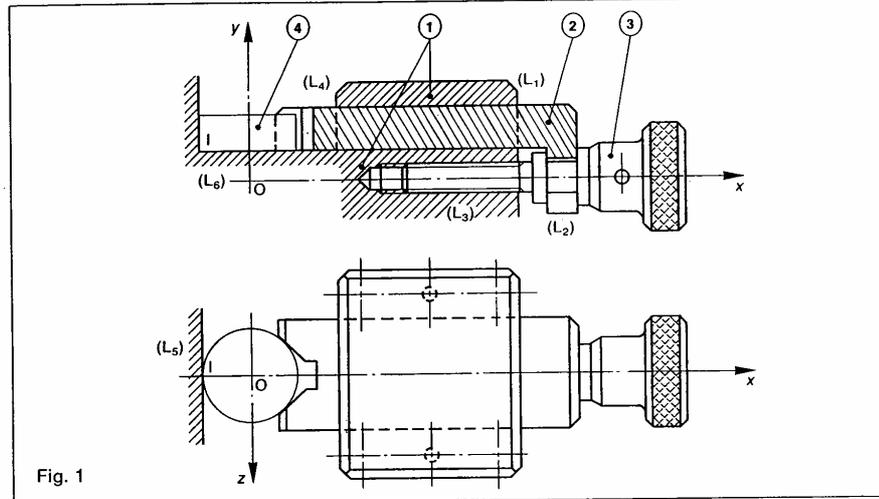


Fig. 1

Le graphe des liaisons de ce mécanisme faisant apparaître les quatre solides en présence réunis par six liaisons s'établit ainsi :

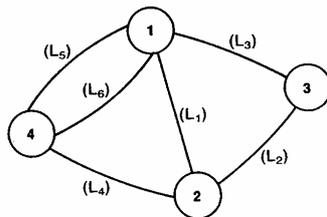


Fig. 2

### 3 TORSEURS STATIQUE ET CINÉMATIQUE D'UNE LIAISON

Soit une liaison  $(L_i)$  entre deux solides  $(S_1)$  et  $(S_2)$ . Plaçons un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  sur la liaison  $(L_i)$ , en tenant compte pour faciliter l'étude de ses éléments de symétrie.

Définissons, au point  $O$ , le torseur d'action mécanique du solide  $(S_1)$  sur le solide  $(S_2)$  à travers la liaison  $(L_i)$  :

$$\left\{ \mathcal{T}(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) \right\} = \begin{matrix} \vec{R}(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) \\ \vec{M}_O(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) \end{matrix}$$

Dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  posons :

$$\vec{R}(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) = X_i \vec{x} + Y_i \vec{y} + Z_i \vec{z}$$

$$\vec{M}_O(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) = L_i \vec{x} + M_i \vec{y} + N_i \vec{z}$$

Et pour simplifier, adoptons l'écriture :

$$\left\{ \mathcal{T}(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) \right\} = \left\{ \mathcal{T}_i \right\}$$

Alors :

$$\left\{ \mathcal{T}_i \right\} = \begin{matrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{matrix}$$

Suivant la nature de la liaison  $(L_i)$  certain composantes du torseur  $\left\{ \mathcal{T}_i \right\}$  sont nulles ou liées entre elles par des relations. Par exemple, si  $(L_i)$  est une liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x})$  :  $X_i$  et  $L_i = 0$ .

#### Définitions

— Le torseur  $\left\{ \mathcal{T}_i \right\}$  est appelé *torseur statique* de la liaison  $(L_i)$ .

— Les composantes  $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$  nulles sont appelées *inconnues statiques* de la liaison  $(L_i)$ .

Notons  $n_s$  le nombre d'inconnues statiques indépendantes de la liaison  $(L_i)$ .

Définissons, au point  $O$ , le torseur cinématique du mouvement de  $(S_2)$  par rapport à  $(S_1)$  que la liaison  $(L_i)$  autorise :

$$\left\{ \mathcal{V}_i(S_2/S_1) \right\} = \begin{matrix} \vec{\Omega}_i(S_2/S_1) \\ \vec{V}_i(O \in S_2/S_1) \end{matrix}$$

Dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  posons :

$$\vec{\Omega}_i(S_2/S_1) = \alpha_i \vec{x} + \beta_i \vec{y} + \gamma_i \vec{z}$$

$$\vec{V}_i(O \in S_2/S_1) = u_i \vec{x} + v_i \vec{y} + w_i \vec{z}$$

Pour simplifier, adoptons l'écriture :

$$\{\mathcal{V}_i(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}_i\}$$

Alors :

$$\{\mathcal{V}_i\} = \begin{pmatrix} \alpha_i & u_i \\ \beta_i & v_i \\ \gamma_i & w_i \end{pmatrix}$$

Suivant la nature de la liaison  $(L_i)$  certaines composantes du torseur  $\{\mathcal{V}_i\}$  sont nulles ou liées entre elles par des relations. Par exemple, si  $(L_i)$  est une liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x})$  :  $\beta_i = 0, \gamma_i = 0, v_i = 0, w_i = 0$ .

**Définitions**

— Le torseur  $\{\mathcal{V}_i\}$  est appelé *torseur cinématique de la liaison  $(L_i)$* .

— Les composantes  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, u_i, v_i, w_i$  non nulles sont appelées *inconnues cinématiques de la liaison  $(L_i)$* .

Notons  $n_{C_i}$  le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes de la liaison  $(L_i)$  :

Connaissant les caractéristiques des torseurs cinématiques et statiques des liaisons (déterminées au chapitre 3 de cinématique et au chapitre 1 de statique) on vérifie facilement qu'il existe entre les nombres  $n_{C_i}$  et  $n_{S_i}$  la relation :

$$n_{C_i} = 6 - n_{S_i}$$

Par exemple, pour une liaison pivot glissant :  $n_{S_i} = 4$  et  $n_{C_i} = 2$ .

**REMARQUES**

La liaison  $(L_i)$  étant supposée sans frottement, on montre en dynamique (voir chapitre 3) que la puissance des actions mutuelles développée dans la liaison est nulle. Or cette puissance est égale à :

$$\vec{M}_0(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) \cdot \vec{\Omega}_i(S_2/S_1) + \vec{R}(S_1 \xrightarrow{L_i} S_2) \cdot \vec{V}_i(O \in S_2/S_1)$$

Par conséquent, les inconnues statiques et cinématiques de la liaison doivent vérifier la relation :

$$L_i \alpha_i + M_i \beta_i + N_i \gamma_i + X_i u_i + Y_i v_i + Z_i w_i = 0$$

Considérons par exemple une liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x})$ . Son torseur statique est tel que  $X_i = 0$  et  $L_i = 0$  ( $Y_i, Z_i, M_i, N_i \neq 0$ ).

Par suite, pour que cette puissance soit nulle, quel que soit le mouvement relatif entre les pièces, il faut que :  $\beta_i = 0, \gamma_i = 0, v_i = 0, w_i = 0$ , ce qui montre que  $n_{C_i} = 6 - n_{S_i}$ .

— Le nombre de relations de nullité indépendantes qu'impose une liaison  $(L_i)$  aux composantes  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, u_i, v_i, w_i$  est égal à  $6 - n_{C_i}$ , soit  $n_{S_i}$ .

— On montre en dynamique que la puissance des actions mutuelles développée dans une liaison se met sous la forme du produit du torseur statique  $\{\mathcal{C}_i\}$  par le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_i\}$ , soit :

$$\{\mathcal{C}_i\} \cdot \{\mathcal{V}_i\}$$

Lorsque cette puissance est nulle on dit que les deux torseurs sont réciproques.

**4. LIAISON ÉQUIVALENTE**

Supposons qu'il existe entre deux pièces  $(S_1)$  et  $(S_2)$  plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièces intermédiaires (figure 3).

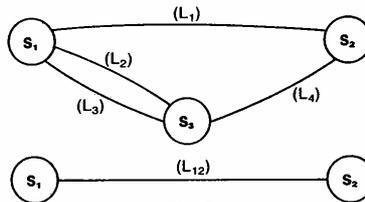


Fig. 3.

La liaison équivalente à l'ensemble des liaisons situées entre les pièces  $(S_1)$  et  $(S_2)$  est la liaison théorique de référence  $(L_{12})$  qui a le même comportement que cette association de liaisons, c'est-à-dire qui transmet la même action mécanique et qui autorise le même mouvement.

Soit  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère lié à  $(S_2)$ . Définissons au point O (choisi en fonction des éléments de symétrie des liaisons pour simplifier les calculs) le torseur d'action mécanique de  $(S_1)$  sur  $(S_2)$  de la liaison équivalente :

$$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{pmatrix} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_0(S_1 \rightarrow S_2) \end{pmatrix}$$

Posons :

$$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \{\mathcal{C}\}$$

et dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$$

$$\vec{M}_0(S_1 \rightarrow S_2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}$$

Alors :

$$\{\mathcal{C}\} = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}$$

Définissons, au même point O, le torseur cinématique du mouvement de  $(S_2)$  par rapport à  $(S_1)$  de la liaison équivalente :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(O \in S_2/S_1) \end{pmatrix}$$

Posons :

$$\{V(S_2/S_1)\} = \{V\}$$

et dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$$

$$\vec{V}(O \in S_2/S_1) = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$$

Alors :

$$\{V\} = \begin{pmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{pmatrix}$$

**Définitions**

- $\{\mathcal{C}\}$  est le *torseur statique* de la liaison équivalente.
- $\{Q\}$  est le *torseur cinématique* de la liaison équivalente.

**REMARQUE**

La liaison équivalente doit également avoir le même bilan énergétique que les liaisons dont elle globalise le comportement. Comme chaque liaison composante développe une puissance nulle, la liaison équivalente doit développer une puissance nulle.

Par suite, le torseur statique et le torseur cinématique de la liaison équivalente sont réciproques.

La connaissance de l'un de ces torseurs entraîne donc la connaissance de l'autre.

Suivant la nature des liaisons et la façon dont elles sont associées, nous allons déterminer dans les paragraphes qui suivent les caractéristiques de la liaison équivalente.

**5. LIAISONS EN PARALLELE**

**5.1. DÉFINITION**

$n$  liaisons  $(L_1), (L_2), \dots, (L_i), \dots, (L_n)$  sont disposées en parallèle entre deux solides  $(S_1)$  et  $(S_2)$  si chaque liaison relie directement ces deux solides.

Le graphe des liaisons se trace ainsi :

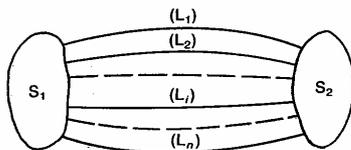


Fig. 4

**5.2. LIAISON ÉQUIVALENTE**

**5.2.1. Torseur statique**

Pour déterminer les caractéristiques du to statique de la liaison équivalente appliquons à le principe fondamental de la statique.

Supposons qu'en plus de l'action mécanique de sur  $(S_2)$  à travers les  $n$  liaisons en parallèle, s'e sur  $(S_2)$  une action mécanique représentée p torseur  $\{\mathcal{C}_0\}$ . Le principe fondamental de la sta appliqué à  $(S_2)$  s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \{\mathcal{C}_i\} + \{\mathcal{C}_0\} = \{\vec{0}\}$$

En écrivant le principe fondamental avec le to statique de la liaison équivalente, on obtient :

$$\{\mathcal{C}\} + \{\mathcal{C}_0\} = \{\vec{0}\}$$

En comparant les relations (1) et (2) on t l'expression du torseur statique de la l équivalente en fonction des torseurs statique  $n$  liaisons en parallèle :

$$\{\mathcal{C}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{C}_i\}$$

Par conséquent : pour qu'une composante d seur statique de la liaison équivalente ne so nulle, il suffit qu'une seule composante corr dante d'une liaison  $(L_i)$  ne soit pas nulle composantes d'action mécanique transmi entre  $(S_1)$  et  $(S_2)$  sont celles qui sont transmi par les liaisons  $(L_i)$ .

**5.2.2. Torseur cinématique**

La connaissance du torseur statique de la équivalente entraîne la connaissance du i cinématique, comme nous l'avons signa paragraphe 4.

Pour l'obtenir directement, il suffit d'écrire torseur cinématique de la liaison équivalen être compatible avec tous les torseurs ciném des liaisons  $(L_i)$ . Soit

$$\{Q\} = \{Q_i\}, \quad \forall i$$

ou bien :

$$\{Q\} = \{Q_1\} = \{Q_2\} = \dots = \{Q_n\}$$

Par exemple, supposons qu'il y ait entre le solides  $(S_1)$  et  $(S_2)$  les deux liaisons en p suivantes :

- $(L_1)$  : liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x})$
- $(L_2)$  : liaison ponctuelle de normale  $(O, \vec{x})$

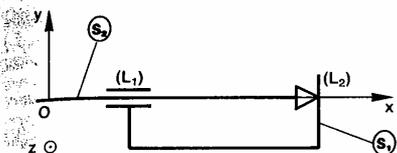


Fig. 4 b/s

Les torseurs cinématiques de ces deux liaisons s'écrivent au point O, dans la base de R :

$$\{Q_1\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & u_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \beta_2 & v_2 \\ \gamma_2 & w_2 \end{Bmatrix}$$

les composantes  $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$  du torseur cinématique de la liaison équivalente doivent vérifier les équations suivantes, déduites de la relation (4) :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta &= 0 = \beta_2 \\ \gamma &= 0 = \gamma_2 \\ u &= u_1 = 0 \\ v &= 0 = v_2 \\ w &= 0 = w_2 \end{aligned}$$

Par suite, le torseur cinématique de la liaison équivalente s'écrit :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

torseur qui correspond à une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$ .

**REMARQUE**

Les composantes de mouvement existant entre  $(S_1)$  et  $(S_2)$  sont celles qui appartiennent simultanément à toutes les liaisons  $(L_i)$ .

**5.2.3. Hyperstatisme et mobilité**

Le nombre total d'inconnues statiques introduit par les  $n$  liaisons en parallèle est :

$$N_s = \sum_{i=1}^n n_{s_i}$$

L'écriture de la relation (3) donne six équations scalaires pour déterminer les  $N_s$  inconnues statiques en fonction des composantes X, Y, Z, L, M, N du torseur statique de la liaison équivalente.

Soit  $r_s$  le nombre d'équations scalaires indépendantes ( $r_s \leq 6$ ).

**\*REMARQUE**

$r_s$  est le rang de la matrice associée à ce système de six équations à  $N_s$  inconnues, c'est-à-dire l'ordre d'un des déterminants principaux que l'on peut extraire de cette matrice.

**Définitions**

Le degré d'hyperstatisme  $h$  de la liaison équivalente aux  $n$  liaisons en parallèle est égal au nombre total  $N_s$  d'inconnues statiques introduit par les liaisons, moins le nombre  $r_s$  de relations indépendantes entre ces inconnues.

Soit :  $h = N_s - r_s$ .

Lorsque  $h=0$  la liaison équivalente est dite isostatique.

Lorsque  $h>0$  la liaison équivalente est dite hyperstatique d'ordre  $h$ .

Les  $h$  inconnues statiques qui ne peuvent pas être calculées en fonction des composantes X, Y, Z, L, M, N du torseur statique de la liaison équivalente sont appelées inconnues hyperstatiques.

**REMARQUE**

En explicitant la relation (4) on constate que le nombre  $r_s$  représente aussi le nombre de relations de nullité indépendantes imposées aux composantes  $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$ , du torseur cinématique de la liaison équivalente (voir application du paragraphe 5.3). Cette propriété se démontre dans le cas général.

**Définitions**

Le degré de mobilité  $m$  de la liaison équivalente aux  $n$  liaisons en parallèle est égal à 6 (nombre de degrés de liberté de la liaison libre) moins le nombre  $r_s$  de relations de nullité indépendantes imposées aux composantes du torseur cinématique de la liaison équivalente.

Soit :  $m = 6 - r_s$ .

Lorsque  $m=0$  la liaison équivalente est dite complète ou rigide.

Lorsque  $m>0$  la liaison équivalente est dite mobile à  $m$  degrés de liberté.

**5.3. Applications**

**Application 1**

Considérons un arbre  $(S_2)$ , d'axe  $(O, \vec{x})$  monté dans un bâti  $(S_1)$  par l'intermédiaire de deux liaisons  $(L_1)$  et  $(L_2)$ . La liaison  $(L_1)$  est une liaison linéique annulaire d'axe  $(O, \vec{x})$ , de centre O.

La liaison  $(L_2)$  est une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$ .

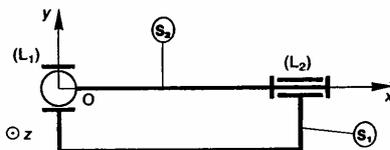


Fig. 5.

**QUESTION 1**

Déterminer le torseur statique de la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ).

**RÉPONSE**

Soit  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère lié à ( $S_2$ ). Les torseurs statiques des liaisons ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) ont au point O, dans la base de R, leur forme particulière conservée.

Posons

$$\{\mathcal{C}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{C}_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{Bmatrix}_O$$

Le torseur statique  $\{\mathcal{C}\}$  de la liaison équivalente est tel que :

$$\{\mathcal{C}\} = \{\mathcal{C}_1\} + \{\mathcal{C}_2\}.$$

Posons :

$$\{\mathcal{C}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

Les six équations scalaires à vérifier sont :

$$\begin{aligned} X &= X_2 \\ Y &= Y_1 + Y_2 \\ Z &= Z_1 + Z_2 \\ L &= 0 \\ M &= M_2 \\ N &= N_2. \end{aligned}$$

Par conséquent le torseur statique de la liaison équivalente est :

$$\{\mathcal{C}\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

Ce torseur statique est celui d'une liaison pivot d'axe ( $O, \vec{x}$ ).

**QUESTION 2**

Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente ainsi que les inconnues hyperstatiques.

**RÉPONSE**

Le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente est :

$$h = N_S - r_S$$

or :  $N_S = n_{S_1} + n_{S_2} = 2 + 5 = 7$

et le nombre d'équations indépendantes permettant le calcul des inconnues statiques des liaisons ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) en fonction de X, Y, Z, L, M, N est  $r_S = 5$ . Par conséquent :

$$h = 2.$$

Les deux inconnues hyperstatiques de la liaison équivalente sont  $Y_1$  ou  $Y_2$  et  $Z_1$  ou  $Z_2$ .

**REMARQUES**

- On vérifie que le degré de mobilité de la liaison équivalente ( $m = 6 - r_S$ ) est bien égal à 1.
- La simultanéité des contacts dans les liaisons ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) impose que le centre de la liaison

( $L_1$ ) soit sur l'axe de la liaison ( $L_2$ ), c'est-à-dire que les coordonnées cartésiennes suivant ( $O, \vec{z}$ ) du centre de la liaison ( $L_1$ ) soient nulles.

On constate donc qu'il y a une correspondance directe entre l'existence d'une composante statique de résultante générale de torseur suivant un axe et une condition dimensionnelle suivant cet axe.

De la même façon on constaterait qu'il y a correspondance directe entre l'existence d'une composante hyperstatique de moment résultant de torseur statique suivant un axe et une condition angulaire autour de cet axe.

Par suite, une construction hyperstatique détermine toujours une plus grande précision relative des liaisons qu'une construction isostatique, d'où une fabrication avec des tolérances de position plus réduites.

**QUESTION 3**

Par une étude cinématique, déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente aux deux liaisons ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ).

**RÉPONSE**

Les torseurs cinématiques des liaisons ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) s'écrivent au point O, dans la base de R :

$$\{\mathcal{V}_1\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & u_1 \\ \beta_1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

et  $\{\mathcal{V}_2\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$

Le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}\}$  de la liaison équivalente a la forme :

$$\{\mathcal{V}\} = \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}_O$$

La compatibilité de  $\{\mathcal{V}\}$  avec  $\{\mathcal{V}_1\}$  impose :  $v = 0, w = 0$ .

La compatibilité de  $\{\mathcal{V}\}$  avec  $\{\mathcal{V}_2\}$  impose :  $\beta = 0, \gamma = 0, u = 0, v = 0, w = 0$ .

Par conséquent cinq relations de nullité indépendantes sont imposées aux composantes du torseur cinématique de la liaison équivalente. Ce nombre est égal à  $r_S$  : nombre de relations indépendantes entre les inconnues statiques des liaisons.

Par suite le torseur cinématique de la liaison équivalente est :

$$\{\mathcal{V}\} = \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

**REMARQUE**

Les relations  $v = 0$  et  $w = 0$  sont imposées par la présence de composantes hyperstatiques de résultante générale des torseurs statiques des liaisons ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) suivant ( $O, \vec{y}$ ) et ( $O, \vec{z}$ ).

**QUESTION 4**

Pour que la liaison équivalente aux deux liaisons (L<sub>1</sub>) et (L<sub>2</sub>) soit une liaison pivot isostatique d'axe (O,  $\vec{x}$ ), proposer plusieurs modifications possibles de la liaison (L<sub>2</sub>), la liaison (L<sub>1</sub>) restant inchangée.

**RÉPONSE**

La liaison équivalente conservant le même degré de mobilité  $m = 6 - r_S = 1$ , on en déduit que  $r_S = 5$ . Si la liaison est isostatique :  $h = N_S - r_S = 0$ .

Alors :  $N_S = n_{S_1} + n_{S_2} = 5$ .

Comme  $n_{S_1} = 2$ , la liaison (L<sub>2</sub>) doit introduire  $n_{S_2} = 3$  inconnues statiques indépendantes (liaison à 3 degrés de liberté).

Pour trouver une liaison (L<sub>2</sub>) rendant la construction isostatique il suffit de supposer  $Y_2 = 0$  et  $Z_2 = 0$ . Alors le torseur statique de la liaison (L<sub>2</sub>) devient :

$$\{\mathcal{C}_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & M_2 \\ 0 & 0 & N_2 \end{Bmatrix}$$

Ce torseur statique est celui d'une liaison appui plan de normale (O,  $\vec{x}$ ). D'où la première solution (figure 6) :

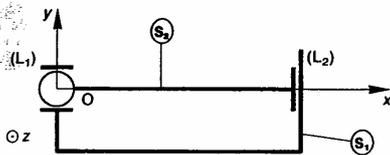


Fig. 6

Les torseurs statiques des liaisons (L<sub>1</sub>) et (L<sub>2</sub>) précédents ont leur forme particulière conservée (chapitre 1 paragraphe 3.4.11) au même point O et dans la même base de R.

Pour obtenir une autre construction isostatique il faut chercher une liaison (L<sub>2</sub>) dont le torseur statique a sa forme particulière en un autre point que le point O.

Envisageons de placer en un point A de l'axe (O,  $\vec{x}$ ) une liaison rotule de centre A. Le torseur statique correspondant est :

$$\{\mathcal{C}_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}$$

Posons :

$$\vec{OA} = l\vec{x} \quad (l \neq 0).$$

Pour vérifier que cette solution convient écrivons que :

$$o\{\mathcal{C}\} = o\{\mathcal{C}_1\} + o\{\mathcal{C}_2\}$$

d'où les six équations scalaires :

$$\begin{aligned} X &= X_2 \\ Y &= Y_1 + Y_2 \\ Z &= Z_1 + Z_2 \\ L &= 0 \\ M &= -lZ_2 \\ N &= lY_2 \end{aligned}$$

Toutes les inconnues statiques de ce système peuvent être calculées en fonction de X, Y, Z, L, M, N et  $r_S = 5$ .

Par conséquent la liaison rotule choisie convient pour réaliser la liaison pivot isostatique entre (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) (figure 7).

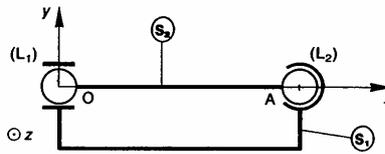


Fig. 7

**REMARQUES**

— C'est au constructeur de choisir en fonction de la nature du mécanisme qu'il étudie la liaison (L<sub>2</sub>) la plus adaptée.

— Lorsqu'en un même point et dans une même base tous les torseurs statiques (ou cinématiques) des liaisons ont leur forme particulière, les liaisons sont dites concentriques.

**Application 2**

Pour vérifier qu'une liaison entre deux pièces (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>), réalisée par association en parallèle de six liaisons ponctuelles de normales connues, est complète et isostatique, il suffit d'utiliser la méthode définie précédemment.

Cependant dans ce cas fréquemment rencontré, en particulier dans les montages d'usinage, on vérifie pratiquement qu'il en est ainsi à condition :

1° qu'il n'y ait pas plus de trois normales parallèles,

2° qu'il n'y ait pas plus de trois normales dans un même plan, ces trois normales étant, ni concourantes en un même point, ni parallèles,

3° qu'il n'y ait pas plus de trois normales non coplanaires concourantes en un même point,

4° que les six normales soient disposées dans 3 directions différentes.

**6. LIAISONS EN SÉRIE**

**6.1. DÉFINITION**

$n$  liaisons (L<sub>1</sub>), (L<sub>2</sub>), ..., (L<sub>i</sub>), ..., (L<sub>n</sub>) sont en série entre deux solides (S<sub>0</sub>) et (S<sub>n</sub>) si elles sont disposées à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de  $(n - 1)$  solides.

Le graphe des liaisons se trace ainsi (figure 8) :

On dit également que les  $(n + 1)$  solides assemblés par les  $n$  liaisons en série constituent une chaîne continue ouverte.

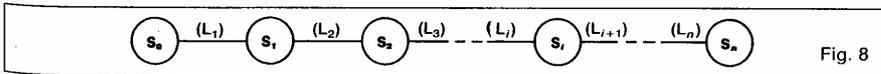


Fig. 8

## 6.2. LIAISON ÉQUIVALENTE

### 6.2.1. Torseur statique

Le torseur statique  $\{\mathcal{T}_i\}$  de la liaison ( $L_i$ ) représente dans cette étude l'action mécanique du solide ( $S_{i-1}$ ) sur le solide ( $S_i$ ). Le torseur statique  $\{\mathcal{T}\}$  de la liaison équivalente représente l'action mécanique équivalente du solide ( $S_0$ ) sur le solide ( $S_n$ ). Supposons qu'en plus des actions mécaniques dans les liaisons entre les différents solides, s'exerce sur le solide ( $S_0$ ) une action mécanique représentée par le torseur  $\{\mathcal{T}_0\}$ . Le principe fondamental de la statique appliqué à ( $S_0$ ) s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_0\} - \{\mathcal{T}_1\} = \{\vec{0}\}$$

à l'ensemble  $\{(S_0), (S_1)\}$  :

$$\{\mathcal{T}_0\} - \{\mathcal{T}_2\} = \{\vec{0}\}$$

à l'ensemble  $\{(S_0), (S_1), (S_2)\}$  :

$$\{\mathcal{T}_0\} - \{\mathcal{T}_3\} = \{\vec{0}\}$$

et ainsi de suite jusqu'à l'ensemble  $\{(S_0), (S_1), \dots, (S_{n-1})\}$  :

$$\{\mathcal{T}_0\} - \{\mathcal{T}_n\} = \{\vec{0}\}.$$

En écrivant le principe fondamental, appliqué à ( $S_0$ ), avec le torseur statique de la liaison équivalente de l'action mécanique de ( $S_0$ ) sur ( $S_n$ ), on obtient :

$$\{\mathcal{T}_0\} - \{\mathcal{T}\} = \{\vec{0}\}.$$

En comparant toutes ces relations on en déduit que le torseur statique de la liaison équivalente doit vérifier :

$$\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}_1\} = \{\mathcal{T}_2\} = \dots = \{\mathcal{T}_n\}. \quad (5)$$

Par conséquent, si une composante d'un torseur statique d'une liaison ( $L_i$ ) est nulle, la composante correspondante du torseur statique de la liaison équivalente est nulle. Les composantes d'action mécanique transmissibles entre ( $S_0$ ) et ( $S_n$ ) sont donc celles qui sont transmissibles simultanément par les liaisons ( $L_i$ ).

### 6.2.2. Torseur cinématique

Le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_i\}$  de la liaison ( $L_i$ ) représente dans cette étude le mouvement du solide ( $S_i$ ) par rapport au solide ( $S_{i-1}$ ). Le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}\}$  de la liaison équivalente représente le mouvement du solide ( $S_n$ ) par rapport au solide ( $S_0$ ).

La relation entre le torseur  $\{\mathcal{V}\}$  et les torseurs  $\{\mathcal{V}_i\}$  s'obtient en écrivant la relation de composition des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence :

$$\{\mathcal{V}(S_n/S_0)\} = \{\mathcal{V}(S_n/S_{n-1})\} + \dots + \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

soit avec les notations utilisées :

$$\{\mathcal{V}\} = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{V}_i\}. \quad (6)$$

Par suite, les composantes de mouvement existantes entre ( $S_0$ ) et ( $S_n$ ) sont toutes celles des liaisons

### 6.2.3. Hyperstatisme et mobilité

L'écriture de la relation (5) :

$$\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}_1\} = \{\mathcal{T}_2\} = \dots = \{\mathcal{T}_n\}$$

permet la détermination de toutes les composées  $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$  des torseurs statiques  $\{\mathcal{T}\}$  fonction des composantes  $X, Y, Z, L, M, N$  du torseur statique  $\{\mathcal{T}\}$  de la liaison équivalente. Par conséquent, la liaison équivalente aux  $n$  liaisons en série entre ( $S_0$ ) et ( $S_n$ ) est toujours *isostatique*.

#### Définition

Le degré de mobilité  $m_u$  de la liaison équivalente aux  $n$  liaisons en série entre ( $S_0$ ) et ( $S_n$ ) est au nombre d'inconnues cinématiques indépendantes du torseur cinématique de la liaison équivalente.

$m_u$  est aussi appelé degré de mobilité utile chaîne continue ouverte.

Le nombre total d'inconnues cinématiques introduites par les  $n$  liaisons en série est :

$$N_c = \sum_{i=1}^n n_{c_i}$$

#### Définition

Le degré de mobilité  $m$  de la chaîne continue ouverte comprenant  $n$  liaisons est égal au nombre  $N_c$  d'inconnues cinématiques introduites par les liaisons.

Soit

$$m = N_c.$$

Comme l'introduction successive de solides intermédiaires entre ( $S_0$ ) et ( $S_n$ ) ne peut qu'augmenter le degré de mobilité de la chaîne continue ouverte à toujours :  $m \geq m_u$  (voir l'application au paragraphe 6.2.4).

$$m = m_u + m_i.$$

$m_i$  est appelé degré de mobilité interne de la chaîne continue ouverte.

Une pièce a une mobilité interne dans un mécanisme (par exemple, une bielle tournant sur elle-même entre deux liaisons rotule) si elle peut avoir un mouvement qui n'entraîne aucun mouvement des autres pièces du mécanisme.

### 6.2.4. Application

Soit une chaîne continue ouverte constituée de solides ( $S_0$ ), ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ).

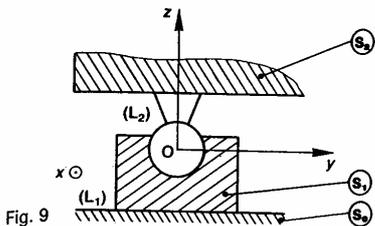


Fig. 9

La liaison (L<sub>2</sub>) entre (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) est une liaison rotule de centre O.

La liaison (L<sub>1</sub>) entre (S<sub>0</sub>) et (S<sub>1</sub>) est une liaison appui plan de normale (O,  $\vec{z}$ ).

Soit R(O,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ) un repère situé sur les liaisons.

**QUESTION 1**

Déterminer le torseur statique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S<sub>0</sub>) et (S<sub>2</sub>).

**RÉPONSE**

Au point O, dans la base de R, les torseurs statiques des liaisons (L<sub>1</sub>) et (L<sub>2</sub>) sont de la forme :

$$\{\mathcal{C}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ 0 & M_1 \\ 0 & Z_1 & 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{\mathcal{C}_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}$$

soit 
$$\{\mathcal{C}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

le torseur statique de la liaison équivalente. Le torseur  $\{\mathcal{C}\}$  est tel que :

$$\{\mathcal{C}\} = \{\mathcal{C}_1\} = \{\mathcal{C}_2\}$$

d'où

$$\begin{matrix} X=0 & X=X_2 \\ Y=0 & Y=Y_2 \\ Z=Z_1 & Z=Z_2 \\ L=L_1 & L=0 \\ M=M_1 & M=0 \\ N=0 & N=0 \end{matrix}$$

Par conséquent le torseur statique de la liaison équivalente est :

$$\{\mathcal{C}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Par suite la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S<sub>0</sub>) et (S<sub>2</sub>) est une liaison ponctuelle de normale (O,  $\vec{z}$ ).

**REMARQUE**

L'avantage d'une telle réalisation est d'avoir des liaisons à contact surfacique.

**QUESTION 2**

Par une étude cinématique, déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S<sub>0</sub>) et (S<sub>2</sub>). En déduire le degré de mobilité interne de la chaîne continue ouverte constituée par (S<sub>0</sub>), (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>).

**RÉPONSE**

Les torseurs cinématiques des liaisons (L<sub>1</sub>) et (L<sub>2</sub>) s'écrivent au point O, dans la base de R :

$$\{\mathcal{V}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & v_1 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \end{Bmatrix} \quad \{\mathcal{V}_2\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \gamma_2 & 0 \end{Bmatrix}$$

soit 
$$\{\mathcal{V}\} = \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$$

le torseur cinématique de la liaison équivalente. Le torseur  $\{\mathcal{V}\}$  est tel que :

$$\{\mathcal{V}\} = \{\mathcal{V}_1\} + \{\mathcal{V}_2\}$$

soit 
$$\begin{matrix} \alpha = \alpha_2 \\ \beta = \beta_2 \\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \\ u = u_1 \\ v = v_1 \\ w = 0. \end{matrix}$$

Par conséquent le torseur cinématique de la liaison équivalente aux deux liaisons en série entre (S<sub>0</sub>) et (S<sub>2</sub>) est de la forme :

$$\{\mathcal{V}\} = \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}$$

Le degré de mobilité de la chaîne continue ouverte constituée par (S<sub>0</sub>), (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) est  $m = N_c$ .

Or : 
$$N_c = n_{c1} + n_{c2} = 3 + 3$$
 donc : 
$$m = 6.$$

Le degré de mobilité  $m_u$  de la liaison équivalente est égal au nombre d'inconnues cinématiques indépendantes du torseur cinématique de la liaison ponctuelle équivalente d'où :

$$m_u = 5.$$

Par suite le degré de mobilité interne de la chaîne continue ouverte est :

$$m_i = m - m_u$$

soit : 
$$m_i = 1.$$

La mobilité interne se localise en remarquant que la relation :  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  indique que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  peuvent être différents de zéro, si le torseur cinématique de la liaison équivalente est nul, c'est-à-dire que (S<sub>1</sub>) peut tourner autour de (O,  $\vec{z}$ ) sans provoquer un mouvement de (S<sub>2</sub>) par rapport à (S<sub>0</sub>).

**7. AVANTAGES ET INCONVENIENTS D'UN MÉCANISME ISOSTATIQUE PAR RAPPORT A UN MÉCANISME HYPERSTATIQUE**

Dans un mécanisme isostatique, l'absence d'inconnues hyperstatiques indique que la position relative des liaisons n'a pas besoin d'être aussi précise que dans un mécanisme hyperstatique.

D'où :

a) Une facilité de fabrication plus grande par l'absence de tolérances de position réduites à respecter (parallélisme, perpendicularité, coaxialité...). Notons que cette facilité de fabrication est en partie compensée par une complexité plus grande du mécanisme. Complexité généralement due à l'introduction de pièces intermédiaires en série dans les liaisons pour augmenter leur nombre de degrés de liberté.

b) Une assurance que les surfaces de liaison sont bien en contact. Par conséquent, une construction isostatique réalise une mise en position précise d'une pièce par rapport à une autre.

c) Une connaissance exacte du torseur statique de chaque liaison, qui permet une évaluation correcte des pressions entre les surfaces en contact.

**EXEMPLE**

*Positionnement isostatique de Kelvin*

Dans ce positionnement, utilisé par exemple pour les tourelles de tour, la liaison isostatique et complète entre les deux pièces (S<sub>1</sub>) et (S<sub>2</sub>) est réalisée par l'association en parallèle des trois liaisons suivantes :

- (L<sub>1</sub>) : liaison rotule.
- (L<sub>2</sub>) : liaison linéique annulaire, dont l'axe passe par le centre de la liaison rotule.
- (L<sub>3</sub>) : liaison ponctuelle, dont la normale est perpendiculaire au plan formé par l'axe de la liaison linéique annulaire et le point de contact de la liaison ponctuelle.

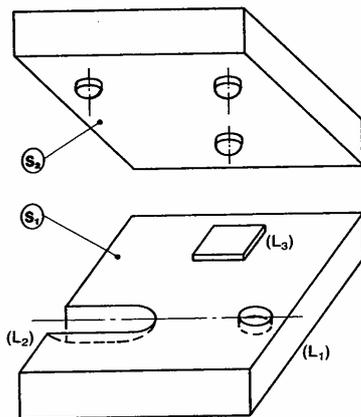


Fig. 10

Ceci dit, un mécanisme hyperstatique est souvent plus rigide qu'un mécanisme isostatique (par exemple un arbre montré sur trois paliers), ce qui est aussi un facteur de précision de position d'une pièce par rapport à une autre. Une telle construction est généralement employée pour les mécanismes de transmission d'actions mécaniques importantes.

**REMARQUE**

Pour savoir si un mécanisme est réelle, hyperstatique, le constructeur devra interpréter les conclusions de l'étude théorique faite à la fonction des solutions technologiques qu'il envisage d'adopter pour le construire. Particulier : introduction de jeu dans les liaisons ou de pièces déformables dans le mécanisme.

**8. MAINTIEN DU CONTACT DANS LES LIAISONS**

Les dispositifs de maintien du contact d'une pièce sur ses appuis se classent en deux catégories :

- 1° Ceux qui assurent un maintien du contact d'une pièce déjà positionnée.
- 2° Ceux qui assurent à la fois la mise en position et le maintien du contact d'une pièce.

Étudions un exemple de la première catégorie ; un exemple de la deuxième catégorie est étudié à l'exercice numéro 2.

Le montage d'usinage (M) de la figure 11 permet d'obtenir sur la pièce (P), les formes définies par les cotes A, B et C, par fraisage « horizontal » (à trois tailles).

La pièce repose sur un plan horizontal, dégagé de sa partie médiane, et s'appuie sur les trois têtes sphériques (1), (2) et (3).

On montre par une étude de liaisons en parallèle que la liaison équivalente ainsi obtenue, en pièce (P) et le montage d'usinage (M), est isostatique et complète.

Étudions le maintien du contact (le bridage) par la vis de pression (V).

Supposons qu'on exerce sur cette vis une action mécanique connue (emploi d'une clé mométrique) pour que les inconnues statiques des liaisons puissent être déterminées (sinon ces inconnues seraient hyperstatiques).

La liaison de la pièce (P) avec le montage d'usinage (M) par l'intermédiaire de la vis (V) fait intervenir en série les deux liaisons suivantes :

- (L<sub>1</sub>) : liaison ponctuelle d'axe (O,  $\vec{y}$ ).
- (L<sub>2</sub>) : liaison glissière hélicoïdale d'axe (O,  $\vec{z}$ ) pas réduit  $p$ .

Déterminons le torseur statique de la liaison équivalente à ces deux liaisons en série.

Au point O, dans la base du repère R(O,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ) lié à (M), les torseurs statiques des deux liaisons (L<sub>1</sub>) et (L<sub>2</sub>) sont de la forme :

$$\{\mathcal{C}_1\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{C}_2\} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}$$

soit

$$\{\mathcal{C}\} = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & Z & N \end{pmatrix}$$

le torseur statique de la liaison équivalente.

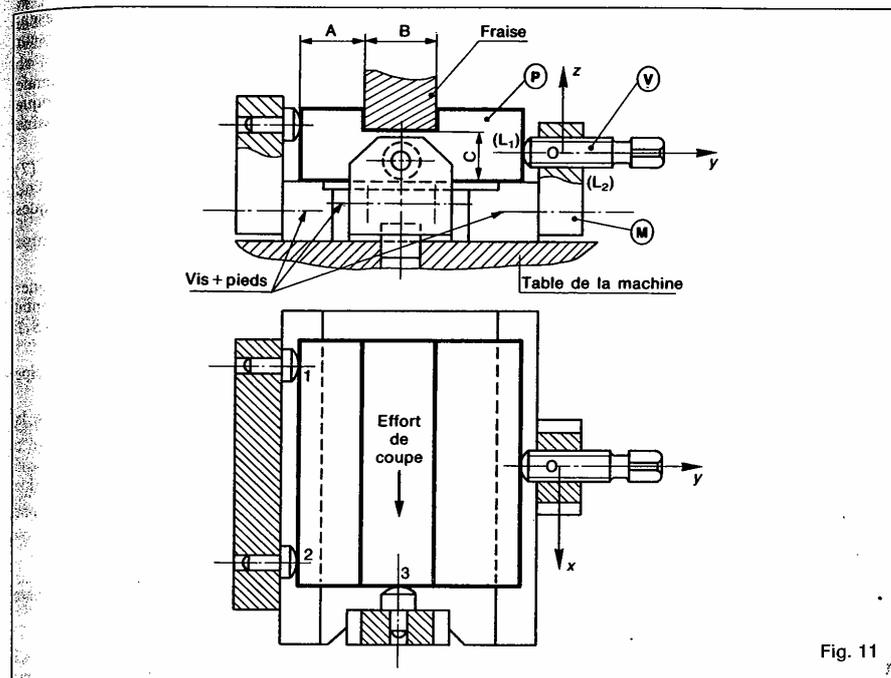


Fig. 11

Le torseur  $\{\mathcal{C}\}$  doit vérifier :

$$\{\mathcal{C}\} = \{\mathcal{C}_1\} = \{\mathcal{C}_2\}$$

soit :

$$\begin{aligned} X &= 0 = X_2 \\ Y &= Y_1 = Y_2 \\ Z &= 0 = Z_2 \\ L &= 0 = L_2 \\ M &= 0 = -p Y_2 \\ N &= 0 = N_2 \end{aligned}$$

Le torseur  $\{\mathcal{C}\}$  est donc nul. Par suite, la liaison équivalente, entre le montage (M) et la pièce (P), au dispositif du maintien du contact est une *liaison libre*.

Ce dispositif de maintien du contact n'ajoute aucune inconnue statique à celles déjà introduites par les liaisons de mise en position de la pièce. Par conséquent, la liaison équivalente aux liaisons de la pièce (P) avec le montage (M) (dispositif de maintien du contact compris) est toujours isostatique.

D'une façon générale, la liaison équivalente entre deux solides, d'un dispositif de maintien du contact n'assurant pas la mise en position relative des solides, doit être une liaison libre. Une telle liaison permet de ne pas augmenter le degré d'hyperstatisme, déjà obtenu par les liaisons de mise en position relative des deux solides.

#### REMARQUES

- Le dispositif de maintien du contact doit permettre des mouvements relatifs dans toutes les directions aux pièces entre lesquelles il vient s'intercaler.
- Le maintien de l'action mécanique de la vis (V) sur la pièce (P) est assuré par l'irréversibilité du système vis-écrou, ce qui n'apparaît pas dans cette étude car les liaisons sont supposées sans frottement.

## 9. CHAÎNE CONTINUE FERMÉE

### 9.1. DÉFINITION

Une chaîne continue ouverte dont les deux solides extrêmes ont une liaison entre eux constitue une chaîne continue fermée.

Dans le cas d'une chaîne continue fermée constituée de  $(n+1)$  solides assemblés en série par  $(n+1)$  liaisons, le graphe des liaisons se trace ainsi :

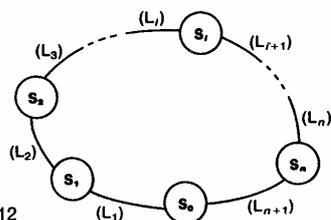


Fig. 12

Une chaîne continue fermée est aussi appelée chaîne simple ou boucle.

**EXEMPLE**

La chaîne cinématique du réducteur représentée figure 13 est une chaîne continue fermée constituée des trois solides suivants :

- (S<sub>0</sub>) : bâti du réducteur
- (S<sub>1</sub>) : arbre d'entrée du réducteur
- (S<sub>2</sub>) : arbre de sortie du réducteur.

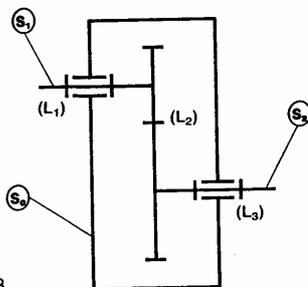


Fig. 13

**9.2. ÉTUDE STATIQUE**

Le torseur statique \$\{\mathcal{C}\_i\}\$ de la liaison \$(L\_i)\$ représente dans cette étude l'action mécanique du solide \$(S\_{i-1})\$ sur le solide \$(S\_i)\$.

Soit \$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})\$ un repère lié au solide \$(S\_0)\$, que l'on supposera être le bâti supportant la chaîne continue fermée.

Supposons qu'en plus des actions mécaniques dans les liaisons entre les différents solides, s'exerce :  
 — sur le solide \$(S\_1)\$ une action mécanique, dite d'entrée du mécanisme, représentée au point \$O\$, dans la base de \$R\$, par le torseur :

$$\{\mathcal{C}_e\} = \begin{Bmatrix} X_e & L_e \\ Y_e & M_e \\ Z_e & N_e \end{Bmatrix}_O$$

— sur le solide \$(S\_n)\$ une action mécanique, dite de sortie du mécanisme, représentée au point \$O\$, dans la base de \$R\$, par le torseur :

$$\{\mathcal{C}_s\} = \begin{Bmatrix} X_s & L_s \\ Y_s & M_s \\ Z_s & N_s \end{Bmatrix}_O$$

— sur le solide \$(S\_0)\$ une action mécanique représentée au point \$O\$, dans la base de \$R\$, par le torseur \$\{\mathcal{C}\_0\}\$ (action mécanique du sol sur le bâti).

Ces trois torseurs sont liés par la relation obtenue en appliquant le principe fondamental de la statique à l'ensemble des \$(n+1)\$ solides de la chaîne continue fermée :

$$\{\mathcal{C}_e\} + \{\mathcal{C}_s\} + \{\mathcal{C}_0\} = \{\mathbf{0}\}$$

soit \$N\_s = \sum\_{i=1}^{n+1} n\_s\$, le nombre d'inconnues statiques introduit par les \$(n+1)\$ liaisons de la chaîne continue fermée.

Toutes les relations entre ces \$N\_s\$ inconnues statiques s'obtiennent en appliquant le principe fondamental de la statique successivement aux \$n\$ solides \$(S\_2), \dots, (S\_n)\$.

Montrons qu'il est inutile d'appliquer le principe fondamental de la statique au solide \$(S\_0)\$.

Pour cela appliquons le principe fondamental de la statique à :

$$(S_1) : \quad \{\mathcal{C}_1\} - \{\mathcal{C}_2\} + \{\mathcal{C}_e\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$(S_2) : \quad \{\mathcal{C}_2\} - \{\mathcal{C}_3\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\dots$$

$$(S_{n-1}) : \quad \{\mathcal{C}_{n-1}\} - \{\mathcal{C}_n\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$(S_n) : \quad \{\mathcal{C}_n\} - \{\mathcal{C}_{n+1}\} + \{\mathcal{C}_s\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Ajoutons membre à membre ces relations, il vient après simplifications :

$$\{\mathcal{C}_1\} - \{\mathcal{C}_{n+1}\} + \{\mathcal{C}_e\} + \{\mathcal{C}_s\} = \{\mathbf{0}\}$$

avec la relation (7) on obtient :

$$-\{\mathcal{C}_1\} + \{\mathcal{C}_{n+1}\} + \{\mathcal{C}_0\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Cette relation traduit l'application du principe fondamental de la statique au solide \$(S\_0)\$. Comme elle se déduit des précédentes, il est inutile d'appliquer le principe fondamental de la statique au solide \$(S\_0)\$.

Soit \$r\_s\$ le nombre d'équations scalaires indépendantes entre les \$N\_s\$ inconnues statiques (\$r\_s \le 6n\$)

**Définition**

Le degré d'hyperstatisme \$h\$ de la chaîne continue fermée est égal au nombre \$N\_s\$ d'inconnues statiques introduit par les liaisons, moins le nombre de relations indépendantes entre ces inconnues :

Soit 
$$h = N_s - r_s.$$

**REMARQUE**

Lorsque le nombre de solides est important, la détermination de \$r\_s\$ est parfois fastidieuse.

Dans cette étude statique, on montre que le nombre de mobilité \$m\$ de la chaîne continue fermée

$$m = 6n - r_s.$$

$m$  représente le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes de la chaîne continue fermée. Par conséquent  $m$  comprend le degré de mobilité interne de la chaîne continue fermée.  
En éliminant  $r_s$  entre (8) et (9), on obtient la relation suivante entre le degré d'hyperstatisme  $h$  et le degré de mobilité  $m$  :

$$h = m + N_s - 6n.$$

Soit :  $N_C = \sum_{i=1}^{n+1} n_{C_i}$  le nombre d'inconnues cinématiques introduit par les  $(n+1)$  liaisons. Sachant que :  $n_{C_i} = 6 - n_{S_i}$ ,  $N_C$  s'écrit :

$$N_C = \sum_{i=1}^{n+1} (6 - n_{S_i})$$

soit :  $N_C = 6(n+1) - N_s.$

Par suite :

$$h = m + 6 - N_C. \quad (10)$$

Cette relation permet le calcul du degré d'hyperstatisme connaissant le degré de mobilité. Nous allons mettre en évidence dans l'étude qui suit, une méthode simple pour déterminer le degré de mobilité de chaîne continue fermée.

### 9.3. ÉTUDE CINÉMATIQUE

Le torseur cinématique  $\{V_i\}$  de la liaison  $(L_i)$  représente dans cette étude le mouvement du solide  $(S_i)$  par rapport au solide  $(S_{i-1})$ .

En écrivant la relation de composition des torseurs cinématiques entre les différents solides en présence, on obtient :

$$\{V(S_0/S_0)\} = \{V(S_0/S_n)\} + \{V(S_n/S_{n-1})\} + \dots + \{V(S_1/S_0)\} = \{\bar{0}\}.$$

Soit avec les notations utilisées :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \{V_i\} = \{\bar{0}\}.$$

En explicitant cette relation on obtient un système de six équations scalaires pour déterminer les  $N_C$  inconnues cinématiques.

Soit  $r_C$  le nombre d'équations scalaires indépendantes ( $r_C \leq 6$ ).

#### Définition

Le degré de mobilité  $m$  de la chaîne continue fermée est égal au nombre  $N_C$  d'inconnues cinématiques introduit par les liaisons, moins le nombre  $r_C$  de relations indépendantes entre ces inconnues.

Soit 
$$m = N_C - r_C.$$

On peut également dire que le degré de mobilité de la chaîne continue fermée est le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes qu'il faut se fixer pour déterminer toutes les autres.

### 9.4. APPLICATION

Considérons un mécanisme de commande d'une tige par un excentrique.

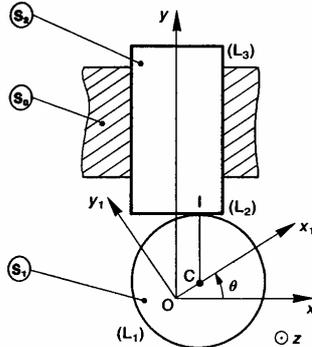


Fig. 14

Soit  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère lié au bâti  $(S_0)$ . L'excentrique  $(S_1)$  est assimilé à un cylindre de révolution d'axe  $(C, \vec{z})$ , de rayon  $a$ .  $(S_1)$  a une liaison pivot  $(L_1)$  d'axe  $(O, \vec{z})$  avec  $(S_0)$ .

Soit  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  un repère lié à  $(S_1)$  tel que :  $\vec{OC} = e\vec{x}_1$  ( $e > 0$ ).

On pose :  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ .

La tige  $(S_2)$ , cylindrique de révolution, a une liaison pivot glissant  $(L_2)$  d'axe  $(O, \vec{y})$  avec  $(S_0)$ .

$(S_1)$  et  $(S_2)$  ont une liaison linéique rectiligne  $(L_3)$  d'axe  $(I, \vec{z})$  et de normale  $\vec{y}$ .

#### QUESTION 1

Par une étude cinématique déterminer le degré de mobilité de la chaîne continue fermée  $(S_0) - (S_1) - (S_2) - (S_0)$ . En déduire son degré d'hyperstatisme.

#### RÉPONSE

Avec les notations définies précédemment, les torseurs cinématiques  $\{V_i\}$  des liaisons  $(L_i)$  sont, dans  $R$ , de la forme :

$$\{V_1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 \end{Bmatrix} \quad \{V_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_2 \\ \beta_2 & 0 \\ \gamma_2 & w_2 \end{Bmatrix} \quad \{V_3\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_3 & v_3 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Les torseurs  $\{V_i\}$  doivent vérifier la relation :

$$\sum_{i=1}^3 \{V_i\} = \{\bar{0}\}.$$

Pour ajouter ces trois torseurs, exprimons au préalable le torseur  $\{V_2\}$  au point  $O$ .

$$\{V_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_2 + \gamma_2(a + e \sin \theta) \\ \beta_2 & -\gamma_2 e \cos \theta \\ \gamma_2 & w_2 + \beta_2 e \cos \theta \end{Bmatrix}.$$

## Statique

Par suite, les inconnues cinématiques sont liées par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 &= 0 \\ u_2 + \gamma_2(a + e \sin \theta) &= 0 \\ v_3 - \gamma_2 e \cos \theta &= 0 \\ w_2 + \beta_2 e \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

Le nombre d'équations indépendantes de ce système est :  $r_C = 5$ .

Le nombre d'inconnues cinématiques introduit par les trois liaisons étant :  $N_C = 1 + 4 + 2 = 7$ , le degré de mobilité de la chaîne continue fermée est :

$$m = N_C - r_C$$

soit :

$$m = 2.$$

### REMARQUE

Si on se fixe  $\gamma_1$  et  $\beta_3$ , on détermine les autres inconnues cinématiques.

Le degré d'hyperstatisme se détermine par la relation  $h = m + 6 - N_C$ .

D'où :

$$h = 1.$$

### QUESTION 2

Par une étude statique, déterminer l'inconnue hyperstatique de la chaîne continue fermée. Proposer une solution pour rendre ce mécanisme isostatique.

### RÉPONSE

Appliquons le principe fondamental de la statique à  $(S_1)$ , puis à  $(S_2)$ , en supposant que s'exerce :

— sur  $(S_1)$  : l'action mécanique d'entrée du mécanisme définie par le torseur :

$$\{\mathcal{C}_e\} = \begin{Bmatrix} X_e & L_e \\ Y_e & M_e \\ Z_e & N_e \end{Bmatrix}$$

— sur  $(S_2)$  : l'action mécanique de sortie du mécanisme définie par le torseur :

$$\{\mathcal{C}_s\} = \begin{Bmatrix} X_s & L_s \\ Y_s & M_s \\ Z_s & N_s \end{Bmatrix}$$

Les torseurs statiques  $\{\mathcal{C}_i\}$  des liaisons  $(L_i)$  sont de la forme :

$$\{\mathcal{C}_1\} = \begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{C}_2\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_2 \\ Y_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{C}_3\} = \begin{Bmatrix} X_3 & L_3 \\ 0 & 0 \\ Z_3 & N_3 \end{Bmatrix}$$

(tous ces torseurs sont exprimés dans la base de R). Appliquons le principe fondamental de la statique à  $(S_1)$  :

$$\{\mathcal{C}_1\} - \{\mathcal{C}_2\} + \{\mathcal{C}_e\} = \{\vec{0}\}$$

d'où après avoir exprimé  $\{\mathcal{C}_2\}$  en O :

$$\begin{aligned} X_1 + X_e &= 0 \\ Y_1 - Y_2 + Y_e &= 0 \\ Z_1 + Z_e &= 0 \\ L_1 - L_2 + L_e &= 0 \\ M_1 + M_e &= 0 \\ -Y_2 e \cos \theta + N_e &= 0. \end{aligned}$$

Appliquons le principe fondamental de la statique à  $(S_2)$  :

$$\{\mathcal{C}_2\} - \{\mathcal{C}_3\} + \{\mathcal{C}_s\} = \{\vec{0}\}$$

d'où après avoir exprimé  $\{\mathcal{C}_2\}$  en O :

$$\begin{aligned} -X_3 + X_s &= 0 \\ Y_2 + Y_s &= 0 \\ -Z_3 + Z_s &= 0 \\ L_2 - L_3 + L_s &= 0 \\ M_s &= 0 \\ Y_2 e \cos \theta - N_3 + N_s &= 0. \end{aligned}$$

On vérifie que les seules inconnues statiques qui peuvent être calculées en fonction des composés des torseurs  $\{\mathcal{C}_e\}$  et  $\{\mathcal{C}_s\}$  sont  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  conséquent l'inconnue hyperstatique du mécanisme est  $L_1$  ou  $L_2$  ou  $L_3$ .

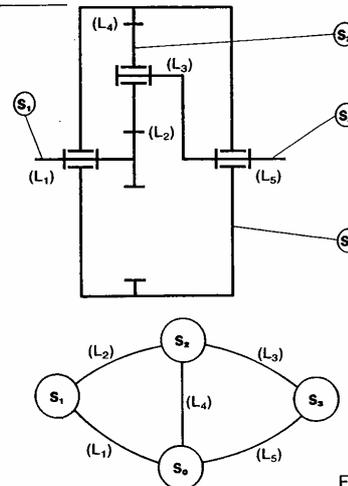
Le mécanisme est isostatique si  $L_2 = 0$ , c'est-à-dire si la liaison  $(L_2)$  est modélisable par une liaison ponctuelle de normale  $(I, \vec{y})$ . C'est le cas si l'excentricité est de faible épaisseur.

## 10. CHAÎNE COMPLEXE

### 10.1. DÉFINITION

Une chaîne complexe est une chaîne cinématique constituée de plusieurs chaînes continues fermées imbriquées.

### EXEMPLE



La chaîne cinématique du réducteur à train épicycloïdal schématisé figure 15 est une chaîne complexe constituée de deux chaînes continues fermées imbriquées, comme l'indique son graphe des liaisons.

### 10.2. NOMBRE CYCLOMATIQUE DE LA CHAÎNE COMPLEXE

Soient  $n$  le nombre de solides et  $l$  le nombre de liaisons de la chaîne complexe. On montre (théorie des graphes) que le nombre de chaînes continues fermées indépendantes à étudier est :

$$\gamma = l - n + 1$$

$\gamma$  est appelé **nombre cyclomatique** de la chaîne complexe.

Pour l'exemple précédent :  $l = 5$  et  $n = 4$ . Par suite :  $\gamma = 2$ .

**REMARQUE**

On choisit les  $\gamma$  chaînes continues fermées de telle façon que toutes les liaisons y apparaissent au moins une fois.

### 10.3. ÉTUDE STATIQUE

Soit  $N_S$  le nombre d'inconnues statiques introduit par les  $l$  liaisons.

En appliquant le principe fondamental de la statique successivement à  $(n - 1)$  solides de la chaîne complexe on obtient  $6(n - 1)$  équations scalaires entre les  $N_S$  inconnues statiques.

Soit  $r_S$  le nombre d'équations scalaires indépendantes ( $r_S \leq 6(n - 1)$ ).

**REMARQUE**

Il est inutile d'appliquer le principe fondamental de la statique aux  $n$  solides, pour la même raison que celle donnée au paragraphe 9.2.

**Définition**

Le **degré d'hyperstatisme**  $h$  de la chaîne complexe est :

$$h = N_S - r_S \quad (10)$$

On montre dans cette étude statique que le **degré de mobilité**  $m$  de la chaîne complexe est :

$$m = 6(n - 1) - r_S \quad (11)$$

En éliminant  $r_S$  entre (10) et (11) on obtient entre le degré d'hyperstatisme  $h$  et le degré de mobilité  $m$  la relation suivante :

$$h = m + N_S - 6(n - 1).$$

Soit  $N_C = \sum_{i=1}^l n_{C_i}$  le nombre d'inconnues cinématiques introduit par les  $l$  liaisons.

Sachant que  $n_{C_i} = 6 - n_{S_i}$ ,  $N_C$  s'écrit :

$$N_C = \sum_{i=1}^l (6 - n_{S_i})$$

soit  $N_C = 6l - N_S$ .

Par suite

$$h = m + 6l - 6(n - 1) - N_C$$

ou avec  $\gamma = l - n + 1$ , on obtient :

$$h = m + 6\gamma - N_C.$$

Cette relation permet le calcul de degré d'hyperstatisme connaissant le degré de mobilité de la chaîne complexe.

### 10.4. ÉTUDE CINÉMATIQUE

En écrivant pour les  $\gamma$  chaînes continues fermées la loi de composition des torseurs cinématiques, comme au paragraphe 9.3, on obtient  $6\gamma$  relations scalaires entre les  $N_C$  inconnues cinématiques de la chaîne complexe.

Soit  $r_C$  le nombre d'équations scalaires indépendantes ( $r_C \leq 6\gamma$ ).

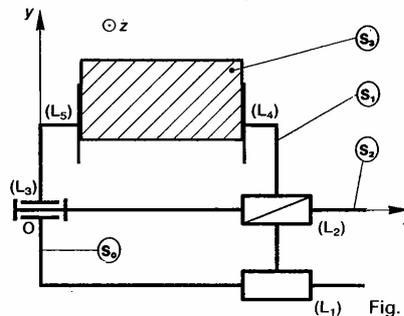
**Définition**

Le **degré de mobilité**  $m$  de la chaîne complexe est :

$$m = N_C - r_C.$$

### 10.5. APPLICATION

Considérons un étau serrant une pièce ( $S_3$ ) de forme parallélépipédique.



Soit  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère lié au mors fixe ( $S_0$ ) de l'étau. Le mors mobile ( $S_1$ ) a une liaison glissière ( $L_1$ ) de direction  $\vec{x}$  avec ( $S_0$ ).

## Statique

La vis de manœuvre ( $S_2$ ) a une liaison pivot ( $L_3$ ) d'axe ( $O, \vec{x}$ ) avec ( $S_0$ ), et une liaison glissière hélicoïdale ( $L_2$ ) d'axe ( $O, \vec{x}$ ) avec ( $S_1$ ). Les liaisons de la pièce ( $S_3$ ) avec le mors fixe ( $S_0$ ) et le mors mobile ( $S_1$ ) sont deux liaisons planes ( $L_5$ ) et ( $L_4$ ) respectivement, de normale  $\vec{x}$ .

### QUESTION 1

Tracer le graphe des liaisons et déterminer le nombre de chaînes continues fermées indépendantes de ce mécanisme.

### RÉPONSE

Le graphe des liaisons se trace ainsi :

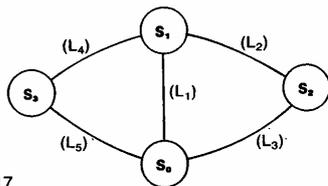


Fig. 17

Ce mécanisme est constitué de quatre solides réunis par cinq liaisons. Par suite le nombre de chaînes continues fermées indépendantes est :  $\gamma = l - n + 1 = 2$ .

### QUESTION 2

Par une étude cinématique déterminer le degré de mobilité de la chaîne complexe. En déduire son degré d'hyperstatisme.

### RÉPONSE

Tous les torseurs cinématiques (ou statiques) des liaisons ont leur forme particulière au point O, dans la base de R (liaisons concentriques).

Posons :

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \{\mathcal{V}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}_2\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 & p\alpha_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (p : \text{pas réduit})$$

$$\{\mathcal{V}(S_0/S_2)\} = \{\mathcal{V}_3\} = \begin{Bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{V}(S_3/S_1)\} = \{\mathcal{V}_4\} = \begin{Bmatrix} \alpha_4 & 0 \\ 0 & v_4 \\ 0 & w_4 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{V}(S_0/S_3)\} = \{\mathcal{V}_5\} = \begin{Bmatrix} \alpha_5 & 0 \\ 0 & v_5 \\ 0 & w_5 \end{Bmatrix}_O$$

Pour la chaîne continue fermée ( $S_0$ )-(S<sub>1</sub>)-(S<sub>2</sub>)-(S<sub>0</sub>), on peut écrire :

$$\{\mathcal{V}_1\} + \{\mathcal{V}_2\} + \{\mathcal{V}_3\} = \{\vec{0}\}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ u_1 + p\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Pour la chaîne continue fermée ( $S_0$ )-(S<sub>1</sub>)-(S<sub>3</sub>)-(S<sub>0</sub>) nous avons :

$$\{\mathcal{V}_1\} + \{\mathcal{V}_4\} + \{\mathcal{V}_5\} = \{\vec{0}\}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ u_1 = 0 \\ v_4 + v_5 = 0 \\ w_4 + w_5 = 0. \end{cases}$$

Les six équations écrites sont indépendantes ( $r_C = 6$  nombre d'inconnues cinématiques introduit par les liaisons) :  $N_C = 1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 9$ .

Par suite le degré de mobilité de la chaîne complexe  $m = 9 - 6$ , soit

$$m = 3.$$

Ce degré de mobilité correspond aux trois composés de mouvement de ( $S_3$ ) par rapport à ( $S_0$ ).

Le degré d'hyperstatisme de la chaîne complexe est  $h = m + 6\gamma - N_C = 3 + 12 - 9$ , soit

$$h = 6.$$

### QUESTION 3

Par une étude statique déterminer les inconnues hyperstatiques du mécanisme. A quelles conditions dimensionnelles angulaires de position relative des liaisons correspondraient-elles ?

### RÉPONSE

Définissons les torseurs statiques des liaisons au point O dans la base de R.

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} = \{\mathcal{T}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \{\mathcal{T}_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & -pX_2 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_0)\} = \{\mathcal{T}_3\} = \begin{Bmatrix} X_3 & 0 \\ Y_3 & M_3 \\ Z_3 & N_3 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_3)\} = \{\mathcal{T}_4\} = \begin{Bmatrix} X_4 & 0 \\ 0 & M_4 \\ 0 & N_4 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{T}(S_3 \rightarrow S_0)\} = \{\mathcal{T}_5\} = \begin{Bmatrix} X_5 & 0 \\ 0 & M_5 \\ 0 & N_5 \end{Bmatrix}_O$$

Supposons que s'exerce sur la pièce ( $S_2$ ) une action mécanique d'entrée du mécanisme définie par le to

$$\{\mathcal{T}_e\} = \begin{Bmatrix} X_e & L_e \\ Y_e & M_e \\ Z_e & N_e \end{Bmatrix}_O$$

supposons également que s'exerce sur la pièce ( $S_3$ ) une action mécanique de sortie du mécanisme définie par le to

$$\{\mathcal{T}_s\} = \begin{Bmatrix} X_s & L_s \\ Y_s & M_s \\ Z_s & N_s \end{Bmatrix}_O$$

Appliquons le principe fondamental de la statique à :

$$(S_0) : \{\mathcal{C}_3\} + \{\mathcal{C}_5\} - \{\mathcal{C}_1\} = \{\bar{0}\}.$$

$$\begin{aligned} X_3 + X_5 &= 0 \\ Y_3 - Y_1 &= 0 \\ Z_3 - Z_1 &= 0 \\ M_3 + M_5 - M_1 &= 0 \\ N_3 + N_5 - N_1 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$(S_1) : \{\mathcal{C}_1\} - \{\mathcal{C}_2\} - \{\mathcal{C}_4\} = \{\bar{0}\}$$

$$\begin{aligned} -X_2 - X_4 &= 0 \\ Y_1 - Y_2 &= 0 \\ Z_1 - Z_2 &= 0 \\ L_1 + pX_2 &= 0 \\ M_1 - M_2 - M_4 &= 0 \\ N_1 - N_2 - N_4 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$(S_2) : \{\mathcal{C}_2\} - \{\mathcal{C}_3\} + \{\mathcal{C}_6\} = \{\bar{0}\}$$

$$\begin{aligned} X_2 - X_3 + X_6 &= 0 \\ Y_2 - Y_3 + Y_6 &= 0 \\ Z_2 - Z_3 + Z_6 &= 0 \\ -pX_2 + L_6 &= 0 \\ M_2 - M_3 + M_6 &= 0 \\ N_2 - N_3 + N_6 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

**REMARQUE**

Il est inutile d'appliquer le principe fondamental de la statique à  $(S_3)$ , les équations obtenues pouvant se déduire de celles déjà trouvées.

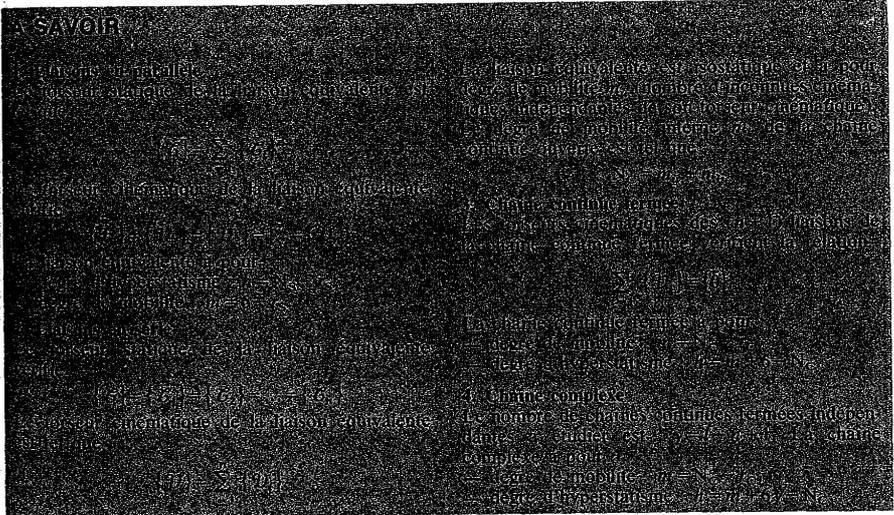
En examinant les dix-huit équations on en déduit que les six inconnues hyperstatiques sont :

$$\begin{aligned} Y_1 \text{ ou } Y_2 \text{ ou } Y_3 \\ Z_1 \text{ ou } Z_2 \text{ ou } Z_3 \\ M_2 \text{ ou } M_3 \\ M_1 \text{ ou } M_4 \text{ ou } M_5 \\ N_2 \text{ ou } N_3 \\ N_1 \text{ ou } N_4 \text{ ou } N_5. \end{aligned}$$

Les inconnues hyperstatiques  $Y_1$  ou  $Y_2$  ou  $Y_3$  et  $Z_1$  ou  $Z_2$  ou  $Z_3$  correspondent à des conditions dimensionnelles de distance, suivant  $(O, \bar{y})$  et  $(O, \bar{z})$ , entre les axes des liaisons  $(L_1)$ ,  $(L_2)$  et  $(L_3)$ .

Les inconnues hyperstatiques  $M_2$  ou  $M_3$  et  $N_2$  ou  $N_3$  correspondent à des conditions angulaires de parallélisme, autour de  $(O, \bar{y})$  et  $(O, \bar{z})$ , entre les axes des liaisons  $(L_2)$  et  $(L_3)$ .

Les inconnues hyperstatiques  $M_1$  ou  $M_4$  ou  $M_5$  et  $N_1$  ou  $N_4$  ou  $N_5$  correspondent à des conditions angulaires de parallélisme, autour de  $(O, \bar{y})$  et  $(O, \bar{z})$ , entre les normales aux plans des liaisons  $(L_4)$  et  $(L_5)$  et l'axe de la liaison  $(L_1)$ .



**PROBLÈME RÉSOLU**

Le robot de manutention représenté figure 18 est utilisé pour le déplacement de pièces d'un poste de travail ( $T_1$ ) à un poste de travail ( $T_2$ ).

Soit  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère lié au bâti ( $S_0$ ) d robot. La glissière ( $S_2$ ) a deux liaisons pivot glissant ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) d'axes ( $H, \vec{x}$ ) et ( $K, \vec{x}$ ) ave

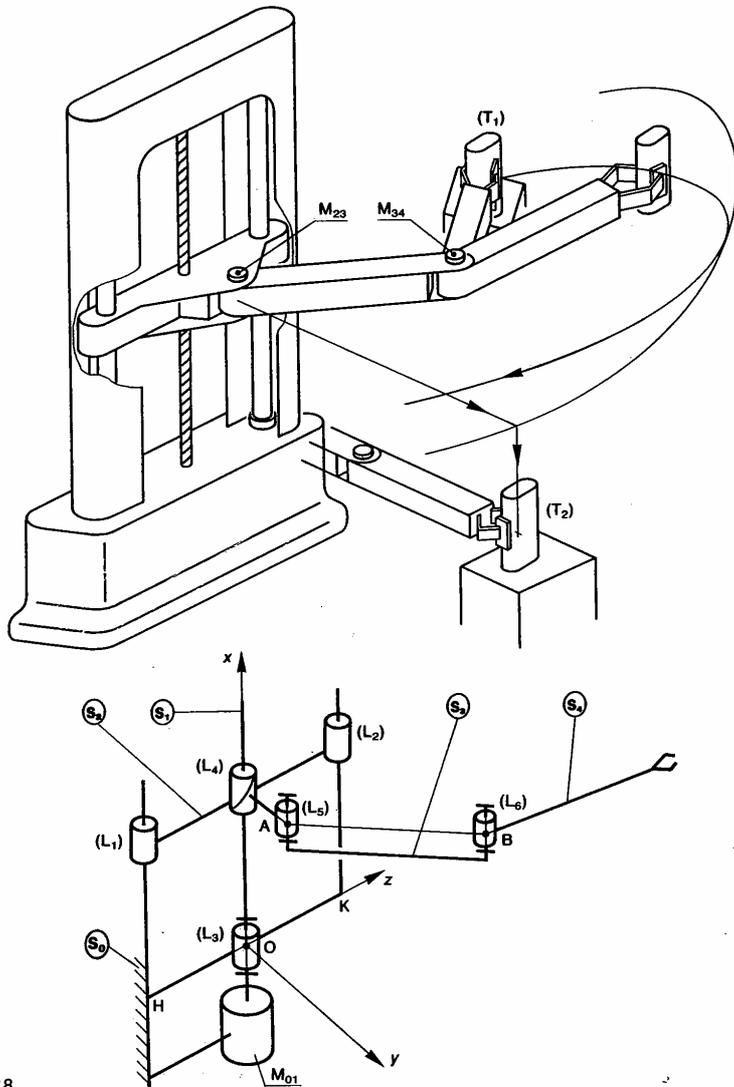


Fig. 18

( $S_0$ ), telles que :  $\overline{OH} = -l\vec{z}$  et  $\overline{OK} = l\vec{z}$  ( $l > 0$ ). La glissière ( $S_2$ ) est entraînée par une vis ( $S_1$ ) ayant une liaison pivot ( $L_3$ ) d'axe ( $O, \vec{x}$ ) avec ( $S_0$ ), et une liaison glissière hélicoïdale ( $L_4$ ) d'axe ( $O, \vec{x}$ ) et de pas réduit  $p$  avec ( $S_2$ ). Cette vis est animée par un moteur ( $M_{01}$ ) lié au bâti ( $S_0$ ). Le bras ( $S_3$ ) a une liaison pivot ( $L_5$ ) d'axe ( $A, \vec{x}$ ) avec la glissière ( $S_2$ ). Le bras ( $S_4$ ) a une liaison pivot ( $L_6$ ) d'axe ( $B, \vec{x}$ ) avec le bras ( $S_3$ ). A son extrémité est fixée la pince de serrage. Les rotations des bras sont obtenues par deux moteurs ( $M_{23}$ ) et ( $M_{34}$ ).

**QUESTION 1**

Tracer le graphe des liaisons entre les pièces ( $S_0$ ), ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ).

**RÉPONSE**

Le graphe des liaisons se trace ainsi :

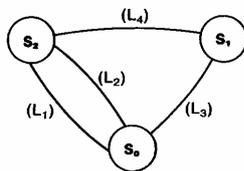


Fig. 19

**QUESTION 2**

Quel est le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) entre ( $S_0$ ) et ( $S_2$ )? Quelles sont les inconnues hyperstatiques? A quelles conditions géométriques de position relative des liaisons correspondent-elles?

**RÉPONSE**

Les torseurs statiques des liaisons ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) sont aux points H et K respectivement, dans la base de R, de la forme :

$$\{\mathcal{T}_1\}_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{pmatrix} \text{ et } \{\mathcal{T}_2\}_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{pmatrix}$$

soit  $\{\mathcal{T}\}_O = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}$

le torseur statique de la liaison équivalente.

Le torseur  $\{\mathcal{T}\}$  est tel que :

$$\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}_1\} + \{\mathcal{T}_2\}.$$

En exprimant ces torseurs au même point O, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= Y_1 + Y_2 \\ Z &= Z_1 + Z_2 \\ L &= lY_1 + lY_2 \\ M &= M_1 + M_2 \\ N &= N_1 + N_2. \end{aligned}$$

Comme  $X = 0$  on vérifie que la liaison équivalente est une liaison glissière de direction  $\vec{x}$ .

Son degré d'hyperstatisme est :  $l_i = N_S - r_S$ . Sachant que le nombre d'inconnues statiques introduit par les liaisons est  $N_S = 8$ , et que le nombre d'équations indépendantes du système écrit précédemment est  $r_S = 5$ , on en déduit que :

$$h = 3.$$

En examinant le système d'équations on constate que les inconnues hyperstatiques sont  $Z_1$  ou  $Z_2$ ,  $M_1$  ou  $M_2$ ,  $N_1$  ou  $N_2$ .

Elles correspondent à une condition dimensionnelle de distance suivant ( $O, \vec{z}$ ) et à deux conditions angulaires de parallélisme, autour de ( $O, \vec{y}$ ) et ( $O, \vec{x}$ ), entre les axes des liaisons ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ).

**QUESTION 3**

Quel est le degré d'hyperstatisme de la chaîne continue fermée ( $S_0$ )—( $S_1$ )—( $S_2$ )—( $S_0$ ) (en faisant abstraction du moteur ( $M_{01}$ ))?

**RÉPONSE**

Déterminons le degré d'hyperstatisme par une étude cinématique. Pour cela définissons les torseurs cinématiques des liaisons, en considérant la liaison équivalente entre ( $S_0$ ) et ( $S_2$ ).

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \{\mathcal{V}_3\} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}_4\} = \begin{pmatrix} \alpha_4 & p\alpha_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}(S_0/S_2)\} = \{\mathcal{V}_{02}\} = \begin{pmatrix} 0 & u_{02} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En écrivant que :  $\{\mathcal{V}_{02}\} + \{\mathcal{V}_4\} + \{\mathcal{V}_3\} = \{\vec{0}\}$  on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_4 + \alpha_3 &= 0 \\ u_{02} + p\alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

La mobilité de cette chaîne est :  $m = N_C - r_C$ , avec  $N_C = 3$  et  $r_C = 2$  (nombre d'équations indépendantes). Soit  $m = 1$ . Par suite le degré

d'hyperstatisme de la chaîne continue fermée  $(S_0) - (S_1) - (S_2) - (S_0)$  est :

$$h = m + 6 - N_c$$

soit

$$h = 4.$$

En sachant que la liaison entre  $(S_0)$  et  $(S_2)$  est elle-même hyperstatique d'ordre 3.

**QUESTION 4**

Déterminer les inconnues hyperstatiques de la chaîne continue fermée  $(S_0) - (S_1) - (S_2) - (S_0)$ . A quelles conditions géométriques de position relative des liaisons correspondent-elles?

Proposer une modification de la liaison  $(L_4)$  pour rendre le mécanisme isostatique et ainsi minimiser l'incidence des actions mécaniques supportées par la vis  $(S_1)$ .

**RÉPONSE**

Définissons au point O, dans la base de R, les torseurs statiques des liaisons, en considérant la liaison équivalente entre  $(S_0)$  et  $(S_2)$ .

$$\{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)\} = \{\mathcal{T}_3\} = \begin{Bmatrix} X_3 & 0 \\ Y_3 & M_3 \\ Z_3 & N_3 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \{\mathcal{T}_4\} = \begin{Bmatrix} X_4 & -pX_4 \\ Y_4 & M_4 \\ Z_4 & N_4 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{T}(S_2 \rightarrow S_0)\} = \{\mathcal{T}_{02}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

Considérons que sur le mécanisme s'exerce :  
 - une action mécanique d'entrée sur la pièce  $(S_1)$ , définie par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_e\} = \begin{Bmatrix} X_e & L_e \\ Y_e & M_e \\ Z_e & N_e \end{Bmatrix}_O$$

- une action mécanique de sortie sur la pièce  $(S_2)$ , définie par le torseur :

$$\{\mathcal{T}_s\} = \begin{Bmatrix} X_s & L_s \\ Y_s & M_s \\ Z_s & N_s \end{Bmatrix}_O$$

Appliquons le principe fondamental de la statique à :

$$\bullet (S_1) : \{\mathcal{T}_3\} - \{\mathcal{T}_4\} + \{\mathcal{T}_e\} = \{\vec{0}\}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_3 - X_4 + X_e &= 0 \\ Y_3 - Y_4 + Y_e &= 0 \\ Z_3 - Z_4 + Z_e &= 0 \\ pX_4 + L_e &= 0 \\ M_3 - M_4 + M_e &= 0 \\ N_3 - N_4 + N_e &= 0. \end{aligned}$$

$$\bullet (S_2) : \{\mathcal{T}_4\} - \{\mathcal{T}_{02}\} + \{\mathcal{T}_s\} = \{\vec{0}\}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_4 + X_s &= 0 \\ Y_4 - Y + Y_s &= 0 \\ Z_4 - Z + Z_s &= 0 \\ pX_4 - L + L_s &= 0 \\ M_4 - M + M_s &= 0 \\ N_4 - N + N_s &= 0. \end{aligned}$$

En examinant ces équations on constate que les quatre inconnues hyperstatiques sont :

$$\begin{aligned} Y_3 \text{ ou } Y_4 \text{ ou } Y \\ Z_3 \text{ ou } Z_4 \text{ ou } Z \\ M_3 \text{ ou } M_4 \text{ ou } M \\ N_3 \text{ ou } N_4 \text{ ou } N. \end{aligned}$$

Ces inconnues hyperstatiques correspondent des conditions dimensionnelles de distance et des conditions angulaires de parallélisme entre les axes des différentes liaisons.

Le mécanisme devient isostatique si, par exemple, on modifie la liaison  $(L_4)$  de telle façon que  $Y_4, Z_4, M_4$  et  $N_4$  soient nulles.

L'écrou de la liaison  $(L_4)$  doit donc être « flottant », c'est-à-dire avoir des possibilités translation et de rotation suivant  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$ . D'où le schéma cinématique de la liaison (I) proposé figure 20.

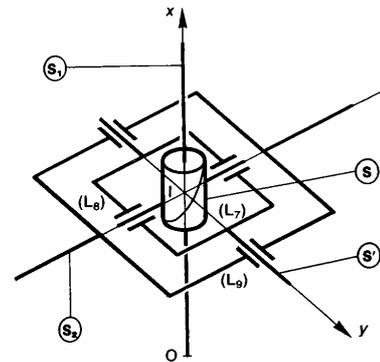


Fig. 20

On a intercalé en série entre  $(S_1)$  et  $(S_2)$  de pièces intermédiaires  $(S)$  et  $(S')$ , avec les liaisons suivantes :

Liaison  $(L_7)$  entre  $(S_1)$  et  $(S)$  : glissière hélicoïdale d'axe  $(O, \vec{x})$ .

Liaison  $(L_8)$  entre  $(S)$  et  $(S')$  : pivot glissant d'axe  $(I, \vec{z})$  ( $I$  : point de l'axe  $(O, \vec{x})$ ).

Liaison  $(L_9)$  entre  $(S')$  et  $(S_2)$  : pivot glissant d'axe  $(I, \vec{y})$ .

Vérifions par une étude cinématique que cette association de liaisons en série convient.

Le torseur cinématique de la liaison équivalente entre  $(S_1)$  et  $(S_2)$  est égal à :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \{\mathcal{V}(S_2/S')\} + \{\mathcal{V}(S'/S)\} + \{\mathcal{V}(S/S_1)\}.$$

Les torseurs cinématiques des liaisons  $(L_7)$ ,  $(L_8)$  et  $(L_9)$  sont au point I, dans la base de R, de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S')\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_9 & v_9 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_I$$

$$\{\mathcal{V}(S'/S)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_8 & w_8 \end{Bmatrix}_I$$

$$\{\mathcal{V}(S/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \alpha_7 & p\alpha_7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_I$$

Posons :  $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}_I$

Alors :  $\alpha = \alpha_7$   
 $\beta = \beta_9$   
 $\gamma = \gamma_8$   
 $u = p\alpha_7$   
 $v = v_9$   
 $w = w_8$ .

Par conséquent, le torseur cinématique de la liaison équivalente est au point I de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \alpha & p\alpha \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}_I$$

Ce torseur s'écrit au point O, en posant  $\vec{OI} = x\vec{x}$  :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \alpha & p\alpha \\ \beta & v - \gamma x \\ \gamma & w + \beta x \end{Bmatrix}_O$$

c'est-à-dire de la forme :

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \alpha & p\alpha \\ \beta & \lambda \\ \gamma & \mu \end{Bmatrix}_O$$

Les inconnues cinématiques  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  étant indépendantes.

Par suite, le torseur statique de la liaison équivalente, réciproque de celui-ci, est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X_4 & -pX_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Par conséquent, la liaison  $(L_4)$  ainsi modifiée rend la chaîne continue fermée

$$(S_0) - (S_1) - (S_2) - (S_0)$$

isostatique. (La liaison entre  $(S_0)$  et  $(S_2)$  étant toujours hyperstatique.)

### CONSEILS POUR LA RESOLUTION

1. Pour faciliter les calculs et l'interprétation des résultats, choisissez soigneusement le point et la base où seront exprimés les torseurs statiques et cinématiques des liaisons.

2. Parmi les caractéristiques d'une liaison équivalente à plusieurs liaisons en parallèle, obtiennent facilement par une étude statique (torseur statique, degré d'hyperstatisme, degré de mobilité, inconnues hyperstatiques).

3. Une étude cinématique donne rapidement le torseur cinématique et par conséquent le torseur statique de la liaison équivalente à plusieurs

liaisons, en *verse*, et met en évidence les mobilités internes.

4. Pour traiter une chaîne continue fermée il est parfois plus simple de remplacer plusieurs liaisons par leur liaison équivalente, et de chercher d'abord les caractéristiques de la liaison équivalente avant d'étudier les liaisons qui la compose.

Pour déterminer le degré d'hyperstatisme d'une chaîne continue fermée, une étude cinématique est beaucoup plus simple qu'une étude statique, car elle ne fait intervenir au maximum que six équations. C'est seulement si l'on veut localiser les inconnues hyperstatiques qu'il faut aborder une étude statique.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — Une bride de serrage, d'un montage d'usinage (0) conçue pour répartir également l'action mécanique de bridage en trois points A, B et C d'une pièce (1) est représentée figure 21.  
 La pièce (4) de la bride et le montage d'usinage (0) ont une liaison-pivot ( $L_6$ ) d'axe  $\Delta$ .  
 La pièce (3) a une liaison pivot ( $L_5$ ) d'axe ( $O, \vec{x}$ ) avec la pièce (4), et la pièce (2) une liaison pivot ( $L_4$ ) d'axe ( $O, \vec{y}$ ) avec la pièce (3).

La pièce (1) a une liaison ponctuelle ( $L_1$ ) de normale ( $A, \vec{z}$ ) avec la pièce (3).  
 On pose :  $\vec{OA} = -a\vec{y} - h\vec{z}$  ( $a$  et  $h > 0$ ).

La pièce (1) a également deux liaisons ponctuelles ( $L_2$ ) et ( $L_3$ ) de normale ( $B, \vec{z}$ ) et ( $C, \vec{z}$ ) avec la pièce (2).  
 On pose :  $\vec{OB} = b\vec{x} + c\vec{y} - h\vec{z}$   
 $\vec{OC} = -b\vec{x} + c\vec{y} - h\vec{z}$  ( $b$  et  $c > 0$ ).

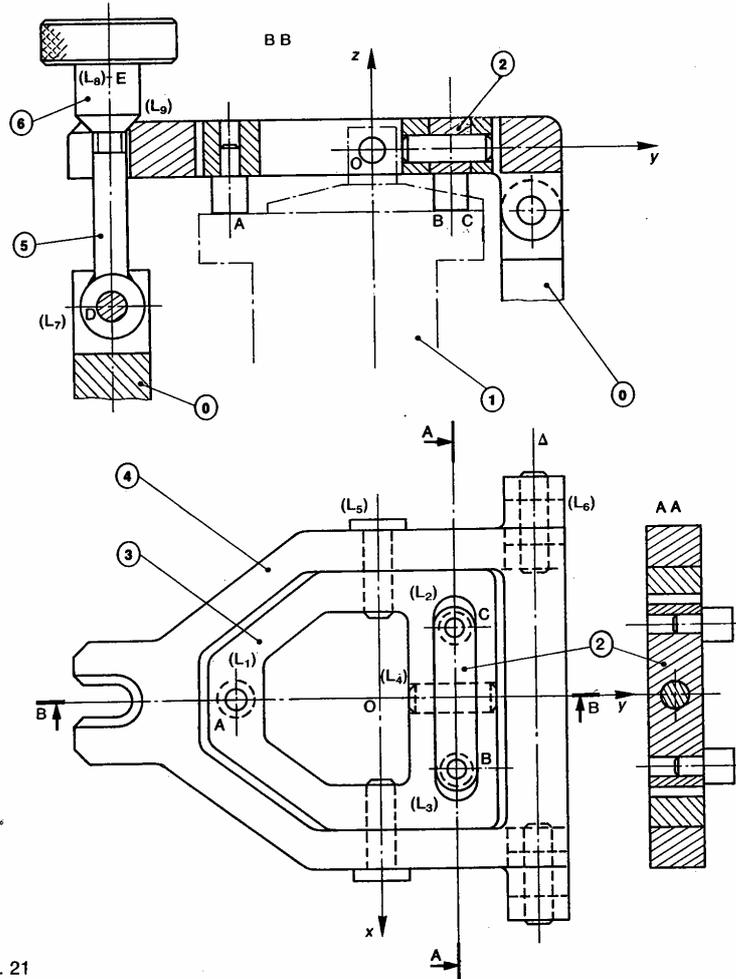


Fig. 21

Le système de maintien du contact est constitué d'un boulon d'axe  $(D, \vec{z})$  dont la tige (5) a une liaison pivot glissant  $(L_7)$  d'axe  $(D, \vec{x})$  avec le montage (0), et dont l'écrou (6) a une liaison linéique annulaire  $(L_9)$  d'axe  $(E, \vec{y})$  avec la pièce (4). On pose :  $\overline{DE} = d\vec{z}$  ( $d > 0$ ). L'écrou (6) et la tige (5) du boulon ont une liaison glissière hélicoïdale  $(L_8)$  d'axe  $(D, \vec{z})$ . L'action mécanique exercée sur l'écrou par l'opérateur est supposée connue.

**QUESTIONS**

- 1° Tracer le graphe des liaisons entre la pièce (1) et la pièce (4).
- 2° Déterminer, par une étude statique, la liaison équivalente  $(L_{12})$  aux deux liaisons en parallèle  $(L_2)$  et  $(L_3)$  entre les pièces (1) et (2).
- 3° Déterminer, par une étude cinématique, la liaison équivalente  $(L_{123})$  aux deux liaisons en série  $(L_{12})$  et  $(L_4)$  entre les pièces (1) et (3).
- 4° Déterminer, par une étude statique, la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle  $(L_{123})$  et  $(L_1)$  entre les pièces (1) et (3).
- En déduire la liaison équivalente aux liaisons entre la pièce (1) et la pièce (4).
- 5° Déterminer la liaison équivalente aux trois liaisons en série  $(L_7)$ ,  $(L_8)$  et  $(L_9)$  entre le montage (0) et la pièce (4) du système de maintien du contact.
- 6° Montrer que la liaison entre la pièce (1) et le montage (0) par l'intermédiaire de la bride de serrage est équivalente à une liaison libre (c'est-à-dire que la bride de serrage peut s'adapter sur la pièce (1) quelle que soit sa position).

**RÉPONSES**

1° Le graphe des liaisons entre les pièces (1) et (4) se trace ainsi :

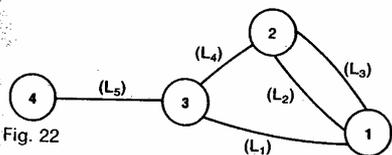


Fig. 22

- 2° La liaison équivalente aux deux liaisons  $(L_2)$  et  $(L_3)$  est une liaison linéique rectiligne d'axe  $(B, \vec{x})$  et de normale  $\vec{z}$ .
- 3° La liaison équivalente aux deux liaisons  $(L_{12})$  et  $(L_4)$  est une liaison ponctuelle de normale  $(I, \vec{z})$  (I milieu de BC).
- 4° La liaison équivalente aux deux liaisons  $(L_{123})$  et  $(L_1)$  est une liaison linéique rectiligne d'axe  $(A, \vec{y})$  et de normale  $\vec{z}$ .
- La liaison équivalente aux liaisons entre la pièce (1) et la pièce (4) est une liaison ponctuelle de normale  $(O, \vec{z})$ .

5° La liaison équivalente aux trois liaisons en série  $(L_7)$ ,  $(L_8)$  et  $(L_9)$  entre le montage (0) et la pièce (4) est une liaison libre.

6° Compte tenu des résultats précédents, on montre par une étude de liaisons en série entre les pièces (0), (4) et (1), que la liaison entre la pièce (1) et le montage (0) est équivalente à une liaison libre (voir graphe des liaisons de la figure 23).

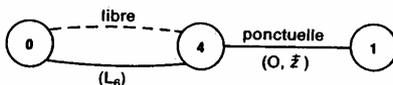


Fig. 23

2 — Le guidage d'un coulisseau au moyen de deux rails avec cages à aiguilles est représenté figure 24.

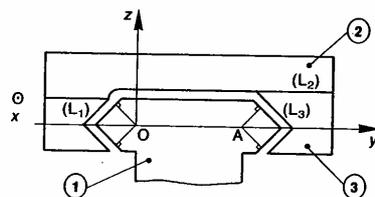
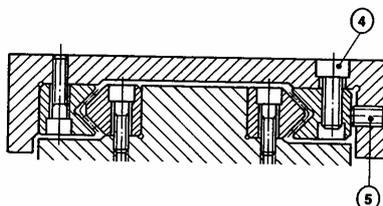


Fig. 24

Le but de l'étude est de déterminer le degré d'hyperstatisme d'une telle conception.

Les aiguilles étant de faible longueur, on considère que la liaison  $(L_1)$  réalisée entre le coulisseau (2) et le guide (1), par l'intermédiaire du rail de guidage, est équivalente à une liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{x})$ , de très faible amplitude de rotation autour de cet axe.

De la même façon, on considère que la liaison  $(L_3)$  réalisée entre le coulisseau (2) et la cale (3) est équivalente à une liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{x})$ , de très faible amplitude de rotation autour de cet axe. On pose :  $\overline{OA} = a\vec{y}$  ( $a > 0$ ).

L'effort de précontrainte dans la glissière est obtenu en positionnant la cale (3) avec les vis de réglage (5). Les vis (4) servent à maintenir la cale (3) dans sa position réglée.

(La cale (3) assure à la fois la mise en position et le maintien du contact dans la liaison glissière.)  
 La liaison (L<sub>2</sub>) entre la cale (3) et le coulisseau (2) est une liaison appui plan de normale  $\vec{z}$ .  
 On suppose que les actions mécaniques exercées sur les vis (4) et (5) sont connues.  
 On suppose également que les liaisons entre le coulisseau (2) et la cale (3) réalisées par l'intermédiaire des vis (4) et (5) sont équivalentes à des liaisons libres.

**QUESTIONS**

- 1° Tracer le graphe des liaisons entre les pièces (1), (2), (3), (4) et (5).
- 2° A quelles conditions peut-on supposer que les liaisons entre le coulisseau (2) et la cale (3), réalisées par l'intermédiaire des vis (4) et (5), sont équivalentes à des liaisons libres?
- 3° Déterminer, par une étude cinématique, la liaison équivalente (L<sub>23</sub>) aux deux liaisons en série (L<sub>2</sub>) et (L<sub>3</sub>) entre les pièces (1) et (2).
- 4° Déterminer, par une étude statique, le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L<sub>23</sub>) et (L<sub>1</sub>) entre les pièces (1) et (2). A quelle condition géométrique de position relative des liaisons correspond l'inconnue hyperstatique?

**RÉPONSES**

1° Le graphe des liaisons se trace ainsi :

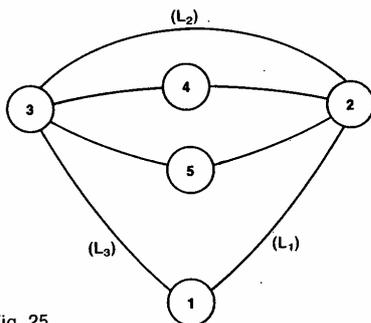


Fig. 25

- 2° Les liaisons entre le coulisseau (2) et la cale (3), réalisées par l'intermédiaire des vis (4) et (5), sont équivalentes à des liaisons libres si on suppose, par exemple, que la liaison entre la vis (5) et la cale (3) est modélisable par une liaison ponctuelle, ainsi que la liaison entre la vis (4) et le coulisseau (2). (L'association en série d'une liaison glissière hélicoïdale et d'une liaison ponctuelle de même axe donne une liaison libre.)
- 3° La liaison équivalente est une liaison linéique rectiligne d'axe (A,  $\vec{x}$ ), de normale  $\vec{z}$ . (Écrire les deux torseurs cinématiques au point A.)

4° Écrire le torseur statique  $\{\mathcal{C}_{23}\}$  au point A. Puis écrire ensuite au point O que le torseur statique de la liaison équivalente vérifie :

$$\{\mathcal{C}\} = \{\mathcal{C}_1\} + \{\mathcal{C}_{23}\}.$$

On en déduit que le degré d'hyperstatisme ( $h = N_s - r_s$ ) de la liaison glissière équivalente est de 1. L'inconnue hyperstatique (M<sub>1</sub> ou M<sub>23</sub>) correspond à une condition angulaire de parallélisme autour de (O,  $\vec{y}$ ) des axes des deux liaisons (L<sub>1</sub>) et (L<sub>3</sub>).

3 — Un montage de fraisage (1) conçu pour usiner le plan (P), à partir du brut, de la pièce (2) est schématisé figure 26.

Le but de l'étude est de vérifier que la liaison équivalente à l'ensemble des liaisons entre la pièce et le montage est complète et isostatique. Soit R(O,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ) un repère lié au montage (1). L'axe (O,  $\vec{z}$ ) est dirigé suivant la verticale descendante. La mise en position de la pièce dans le montage est assurée par :

- Un vé court, réalisant avec la pièce une liaison linéique annulaire (L<sub>1</sub>) d'axe (C,  $\vec{x}$ ), telle que :  $\vec{OC} = -a\vec{x}$  ( $a > 0$ ).
- Une liaison ponctuelle (L<sub>2</sub>) de normale (B,  $\vec{z}$ ) telle que  $\vec{OB} = -b\vec{x} + c\vec{z}$  ( $b$  et  $c > 0$ ).
- un centreur (3) ayant une liaison linéique annulaire (L<sub>3</sub>) d'axe (O,  $\vec{z}$ ) avec la pièce (2), et une liaison glissière (L<sub>4</sub>) d'axe (O<sub>1</sub>,  $\vec{x}$ ) avec le montage (1), telle que :  $\vec{OO}_1 = -d\vec{z}$  ( $d > 0$ ).
- Un centreur (4) ayant une liaison linéique annulaire (L<sub>5</sub>) d'axe (O,  $\vec{z}$ ) avec la pièce (2), et une liaison glissière (L<sub>6</sub>) d'axe (O<sub>2</sub>,  $\vec{x}$ ) avec le montage (1), telle que :  $\vec{OO}_2 = e\vec{z}$  ( $e > 0$ ).
- Un palonnier (5) ayant deux liaisons ponctuelles (L<sub>7</sub>) et (L<sub>8</sub>) de normales (D<sub>1</sub>,  $\vec{x}$ ) et (D<sub>2</sub>,  $\vec{x}$ ) avec la pièce (2), telles que :

$$\begin{cases} \vec{OD}_1 = f\vec{x} + g\vec{y} - h\vec{z} \\ \vec{OD}_2 = f\vec{x} + g\vec{y} + h\vec{z} \end{cases} \quad (f, g \text{ et } h > 0).$$

Ce palonnier a une liaison pivot (L<sub>9</sub>) d'axe (A,  $\vec{y}$ ) avec le montage (1), telle que

$$\vec{OA} = i\vec{x} + g\vec{y} \quad (i > 0).$$

Une bride, en liaison ponctuelle de normale (E,  $\vec{x}$ ) avec la pièce (2), assure le maintien de la pièce sur ses appuis.

**QUESTIONS**

- 1° Tracer le graphe des liaisons de mise en position de la pièce (2) dans le montage (1).
- 2° Déterminer, par une étude cinématique, la liaison équivalente aux deux liaisons en série (L<sub>3</sub>) et (L<sub>4</sub>) entre la pièce (2) et le montage (1).
- 3° Déterminer, par une étude statique, la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L<sub>7</sub>) et (L<sub>8</sub>) entre pièce (2) et le palonnier (5). En déduire la liaison équivalente partielle entre (1) (2), réalisée par l'intermédiaire du palonnier (5).

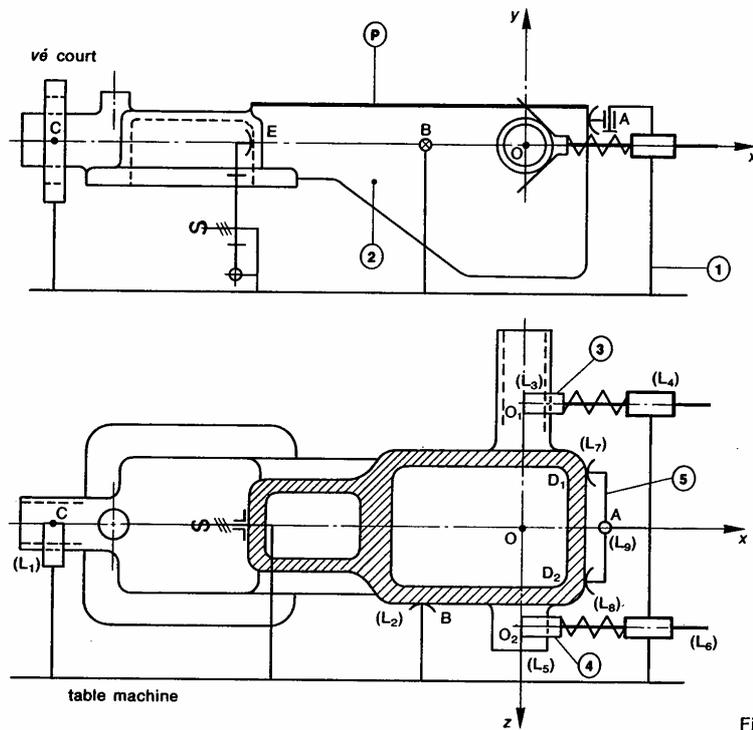


Fig. 26

4° Montrer que le système de bridage, représenté figure 28, réalise entre (1) et (2) une liaison équivalente à une liaison libre.

5° Montrer que la liaison équivalente à l'ensemble des liaisons entre la pièce (2) et le montage (1) est complète et isostatique.

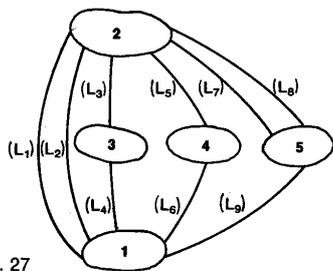


Fig. 27

RÉPONSES

1° Le graphe des liaisons de mise en position de (2) par rapport à (1) se trace ainsi (figure 27) :

2° La liaison équivalente aux deux liaisons en série (L<sub>3</sub>) et (L<sub>4</sub>) est une liaison ponctuelle de normale (O<sub>1</sub>,  $\vec{y}$ ).

3° La liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle (L<sub>7</sub>) et (L<sub>8</sub>) est une liaison linéique rectiligne d'axe D<sub>1</sub>D<sub>2</sub>, de normale  $\vec{x}$ .

La liaison équivalente partielle entre (1) et (2) réalisée par l'intermédiaire du palonnier (5) est une liaison ponctuelle de normale (A,  $\vec{x}$ ).

4° Pour montrer que le bridage est équivalent à une liaison libre, montrer d'abord que la liaison entre le montage (1) et la bride, par l'intermédiaire du goujon, est équivalente à une liaison libre, ensuite que les deux liaisons en série restantes entre (1) et (2) sont équivalentes à une liaison libre.

5° Avec les liaisons équivalentes mises en évidence dans les questions précédentes, on montre par une étude statique de liaisons en parallèle, que la liaison équivalente à l'ensemble des liaisons entre (1) et (2) est complète et isostatique.

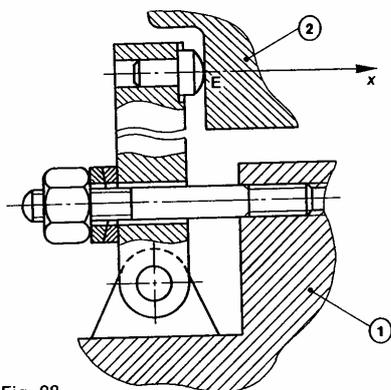


Fig. 28

(\*) Un des déterminants principaux associé au système d'équations s'écrit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & -e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \end{vmatrix}$$

d'où  $\Delta = -a(e+d)(a-b)$ ,  
comme  $a \neq b$ ,  $\Delta \neq 0$  et  $r_S = 6$ .  
Par suite  $h = N_S - r_S = 0$  et  $m = 6 - r_S = 0$ .

4 — On se propose d'améliorer le prototype de montage d'usinage à plateau tournant représenté sur la figure 29, et destiné à usiner la rainure de fraisage indiquée.

Le cycle d'usinage est le suivant :

- 1° Blocage pneumatique de la pièce sur le plateau (7).
- 2° Translation rectiligne du sous-ensemble {2), (6), (7)} commandée par le vérin (3) (liaison (2)-(8) non représentée).
- 3° Rotation du plateau (7) commandée par le vérin (6).
- 4° Retour rapide à la position initiale par action simultanée des deux vérins.

Les liaisons de ce mécanisme sont représentées sur le schéma cinématique de la figure 30.

- (L<sub>1</sub>) : liaison pivot glissant d'axe (B,  $\vec{x}'$ ) entre l'ensemble tige-piston (5) du vérin et le cylindre (6).
- (L<sub>2</sub>) : liaison pivot d'axe (B,  $\vec{z}$ ) entre le cylindre (6) et le coulisseau (2).
- (L<sub>3</sub>) : liaison pivot d'axe (C,  $\vec{z}$ ) entre la tige (5) du vérin et le plateau porte-pièce (7).
- (L<sub>4</sub>) : liaison pivot d'axe (A,  $\vec{z}$ ) entre le plateau (7) et le coulisseau (2).
- (L<sub>5</sub>) : liaison glissière d'axe (D,  $\vec{y}$ ) entre le coulisseau (2) et le corps (4) du montage.
- (L<sub>6</sub>) : liaison pivot glissant d'axe (D,  $\vec{y}$ ) entre l'ensemble tige-piston (8) du vérin et l'ensemble cylindre (3) - corps (4).
- (L<sub>7</sub>) : liaison entre la tige (8) et le coulisseau (2), déterminer.

On pose :

$$\theta = (\vec{x}', \vec{u})$$

$$\overline{BC} = a\vec{x}' \quad (a > 0)$$

$$\overline{CA} = b\vec{u} \quad (b > 0).$$

### QUESTIONS

- 1° Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.
- 2° Déterminer le nombre de chaînes continues fermées indépendantes.

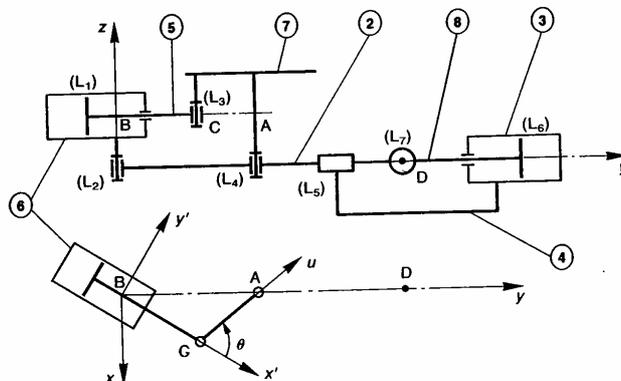


Fig. 30

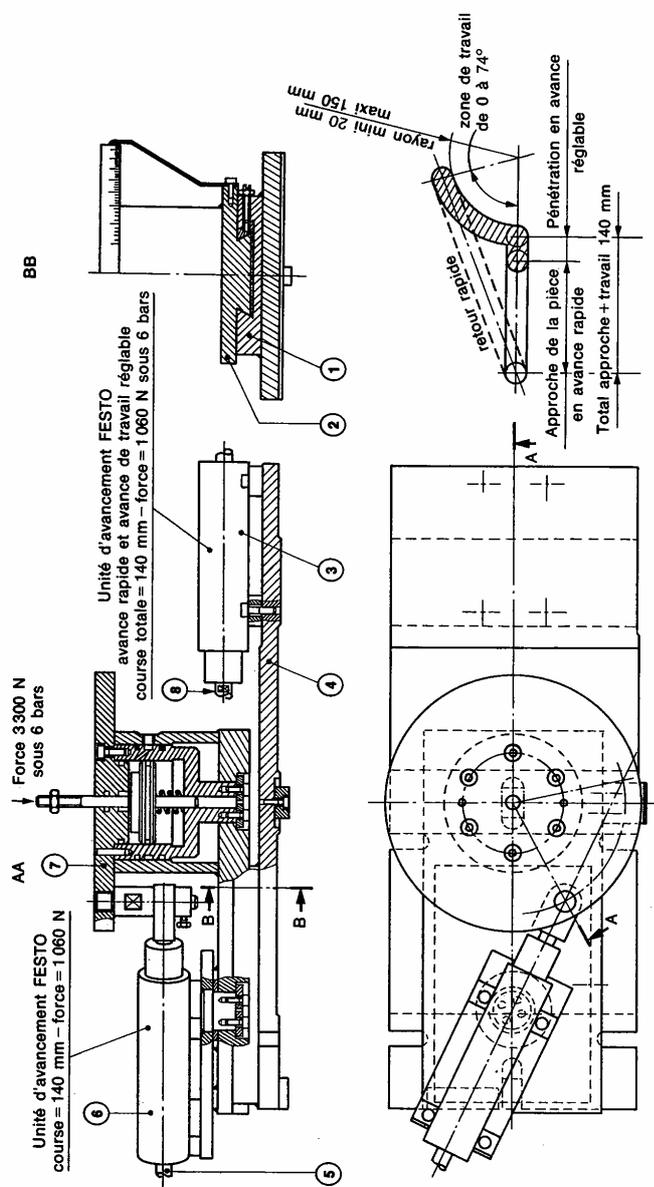


Fig. 29

3° Étude de la chaîne continue fermée

(2) — (4) — (8).

- a) Déterminer la liaison équivalente ( $L_{56}$ ) aux deux liaisons en série ( $L_5$ ) et ( $L_6$ ) entre les pièces (2) et (8).
- b) Déterminer au point D, le torseur statique de la liaison ( $L_7$ ), pour que la liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle ( $L_{56}$ ) et ( $L_7$ ) entre les pièces (2) et (8) soit une liaison pivot isostatique d'axe ( $D, \vec{y}$ ) (on admet une rotation de la tige (8) autour de son axe).
- c) Faire le croquis d'une solution technologique de la liaison ( $L_7$ ) répondant à la question précédente.

4° Étude de la chaîne continue fermée

(7) — (5) — (6) — (2).

- a) Déterminer par une étude cinématique le degré d'hyperstatisme de la chaîne continue fermée.
- b) Afin de rendre cette chaîne isostatique, la liaison ( $L_3$ ) sera modifiée. Déterminer alors par une étude statique, les inconnues hyperstatiques relatives à cette liaison.
- c) Faire le croquis d'une solution technologique de la liaison ( $L_3$ ) rendant la chaîne isostatique (on admet une rotation de la tige (5) autour de son axe).

RÉPONSES

1° Le graphe des liaisons se trace ainsi :

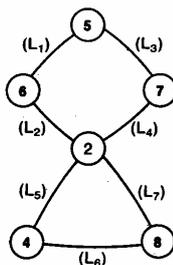


Fig. 31

2° Le nombre de chaînes continues fermées indépendantes est :  $\gamma = l - n + 1$ . Avec  $l = 7$  et  $n = 6$ ,  $\gamma = 2$ .

3° a) Le torseur cinématique de la liaison équivalente ( $L_{56}$ ) est de la forme, au point D, dans la base ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) :

$$\{ \mathcal{V}_{56} \}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & v \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

b) Le torseur statique de la liaison ( $L_7$ ) est de la forme, au point D, dans la base ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ) :

$$\{ \mathcal{Z}_7 \}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_7 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

torseur correspondant à une liaison ponctuelle normale ( $D, \vec{y}$ ).

REMARQUE

Le degré d'hyperstatisme d'une chaîne continue fermée est :  $h = m + 6 - N_C$ . Si on admet rotation de la tige (8) autour de son axe, la mob. de la chaîne (2) — (4) — (8) est :  $m = 2$ . Le nombre d'inconnues cinématiques introduit les liaisons est  $N_C = n_{C_5} + n_{C_6} + n_{C_7}$ , avec  $n_{C_5} = 1$ ,  $n_{C_6} = 2$ . Par suite si la chaîne est isostatique;  $h = 0$ ,  $n_{C_7} = 5$ . La liaison ( $L_7$ ) est donc à cinq degrés de liberté. Cette information permet de guider le choix vers solution convenable.

c) La liaison ( $L_7$ ) peut-être obtenue par association série d'une liaison rotule et d'une liaison appui plat.

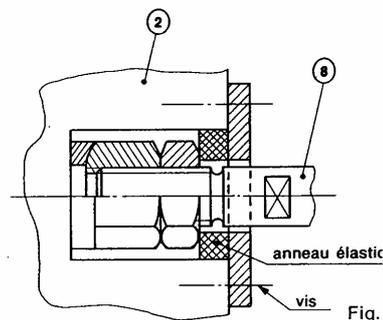


Fig.

4° a) Le degré d'hyperstatisme de la chaîne continue fermée est :  $h = 2$ .

Pour traiter simplement cette question, ainsi que suivante, exprimer tous les torseurs au point C, dans la base ( $\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}'$ ).

b) Posons

$$\{ \mathcal{Z}(5 \rightarrow 7) \}_C = \{ \mathcal{Z}_3 \}_C = \begin{Bmatrix} X_3 & L_3 \\ Y_3 & M_3 \\ Z_3 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')}$$

les deux inconnues hyperstatiques sont  $Z_3$  et  $M_3$ .

c) La liaison ( $L_3$ ) peut-être obtenue par association série d'une liaison rotule et d'une liaison pivot glissant.

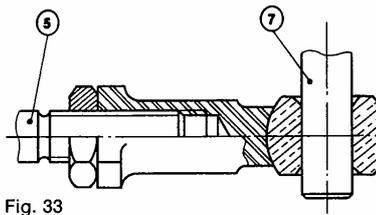


Fig. 33

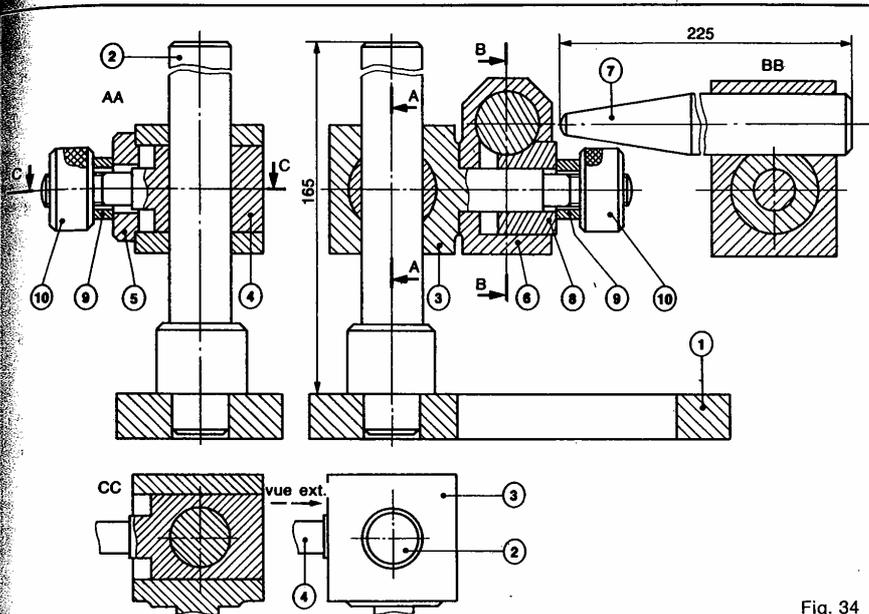


Fig. 34

5 — La figure 34 représente le dessin d'ensemble d'une butée pour table de fraiseuse.

La pièce à usiner vient buter sur l'extrémité (7), réglée pour assurer à une série de pièces une cote de fabrication ayant pour origine le point d'appui.

Pour que les dispersions sur cette cote soient acceptables, il est nécessaire que la butée n'évolue pas en position en cours d'usinage sous l'effet d'actions mécaniques variables et de vibrations. Pour éviter cela, on peut envisager deux solutions :

1° Remplacer les écrous moletés (10) par des écrous hexagonaux manœuvrés à la clé, pour créer des actions mécaniques suffisantes sur les pièces internes de l'appareil. Cette solution à l'inconvénient de rendre difficilement maîtrisable une légère modification de la position de la butée, nécessaire pour un réglage.

2° La construction proposée est très hyperstatique et malgré la qualité de la fabrication, il est probable qu'au montage des premiers ensembles il faudra prévoir des modifications augmentant certains jeux, qui seront préjudiciables à l'appareil car ils augmenteront la dispersion de la butée.

Une deuxième solution consiste donc à envisager une construction isostatique, pour localiser les contacts, et en simplifier la fabrication.

**QUESTION**

Pour chacune des liaisons : (2) — (3), (2) — (4), (3) — (4), (3) — (6), (6) — (7), (7) — (8), (6) — (8) et (9) — (10), proposer une solution afin de rendre la liaison isostatique.

**REMARQUE**

Dans cet exercice il vous est demandé d'adapter l'étude théorique du cours à des problèmes concrets de construction.

**RÉPONSES**

— Liaison (2) — (3).

Ce guidage en rotation avec jeu se comporte en réalité comme une linéique rectiligne suivant une génératrice de contact. Pour pallier cette insuffisance la figure 35 montre que quatre appuis surfaciques ont été réalisés par un léger fraisage à l'opposé de la poussée de (4).

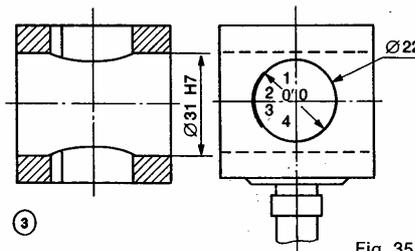


Fig. 35



**EXERCICES SANS RÉPONSE**

— La figure 41 représente le dessin d'ensemble d'une table d'affuteuse. Trois liaisons glissière d'axe (A,  $\vec{x}$ ), (O,  $\vec{y}$ ) et (O,  $\vec{x}$ ) assurent le déplacement de la table d'affuteuse. Trois liaisons glissière d'axe (A,  $\vec{z}$ ), (11) par rapport au bâti.

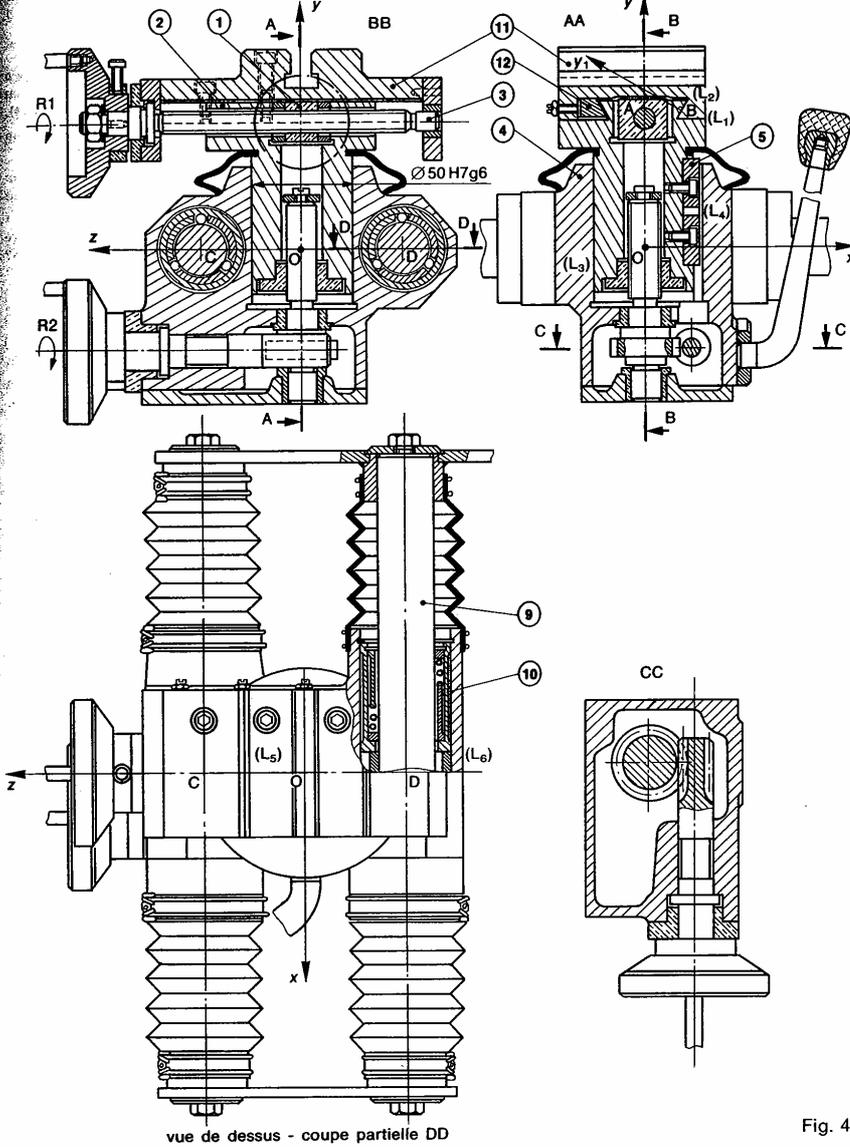


Fig. 41

La liaison glissière d'axe  $(A, \vec{z})$  entre la table (11) et la pièce (2) est constituée par une liaison appui-plan  $(L_1)$  de normale  $\vec{y}$ , et une autre liaison appui-plan  $(L_2)$  de normale  $\vec{y}_1$ . On pose :  $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ . Le maintien du contact est assuré par la cale pentée (12), sur laquelle a été exercée une action mécanique connue par l'intermédiaire des vis de réglage.

La liaison glissière d'axe  $(O, \vec{y})$  entre la pièce (2) et le chariot (4) est constituée par la liaison pivot glissant  $(L_3)$  de  $\varnothing 50$  H7g6 et la liaison linéique rectiligne  $(L_4)$  entre la clavette (5) et le chariot (4).

Enfin la liaison glissière d'axe  $(O, \vec{x})$  entre le chariot (4) et le bâti est constituée par deux liaisons pivot glissant  $(L_5)$  et  $(L_6)$  d'axes parallèles  $(C, \vec{x})$  et  $(D, \vec{x})$ . On pose :  $OC = -OD = a\vec{z}$  ( $a > 0$ ).

**QUESTIONS**

1° a) Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison glissière d'axe  $(A, \vec{z})$  équivalente aux deux liaisons en parallèle  $(L_1)$  et  $(L_2)$ , entre la table (11) et la pièce (2).

b) A quelle condition géométrique de position relative des liaisons correspond l'inconnue hyperstatique?

c) Si on modélise la liaison  $(L_2)$  par une liaison linéique rectiligne d'axe  $(B, \vec{z})$  de normale  $(B, \vec{y}_1)$ , montrer que la liaison équivalente aux deux liaisons  $(L_1)$  et  $(L_2)$  est isostatique.

d) Quel est le degré d'hyperstatisme supplémentaire qu'introduit le dispositif de maintien du contact à liaison équivalente aux deux liaisons  $(L_1)$  et  $(L_2)$  et la table (11) et la pièce (2), si on modélise la liaison entre la cale pentée (12) et la pièce (2) par :

$\alpha$ ) une liaison appui-plan?

$\beta$ ) une liaison linéique rectiligne?

2° a) Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison glissière d'axe  $(O, \vec{y})$  équivalente aux deux liaisons parallèles  $(L_3)$  et  $(L_4)$ , entre la pièce (2) et le chariot.

b) Proposer une modification pour rendre la liaison équivalente isostatique.

3° a) Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison glissière d'axe  $(O, \vec{x})$  équivalente aux deux liaisons parallèles  $(L_5)$  et  $(L_6)$  entre le chariot (4) et le bâti.

b) A quelles conditions géométriques de position relative des liaisons correspondent les inconnues hyperstatiques?

7 — La figure 42 représente le schéma cinématique d'un épandeur d'engrais VICON.

L'arbre ① est lié par un double joint de CARDAN à prise de force du tracteur. L'arbre ③, animé d'un mouvement de rotation alternatif, porte le tube distri-

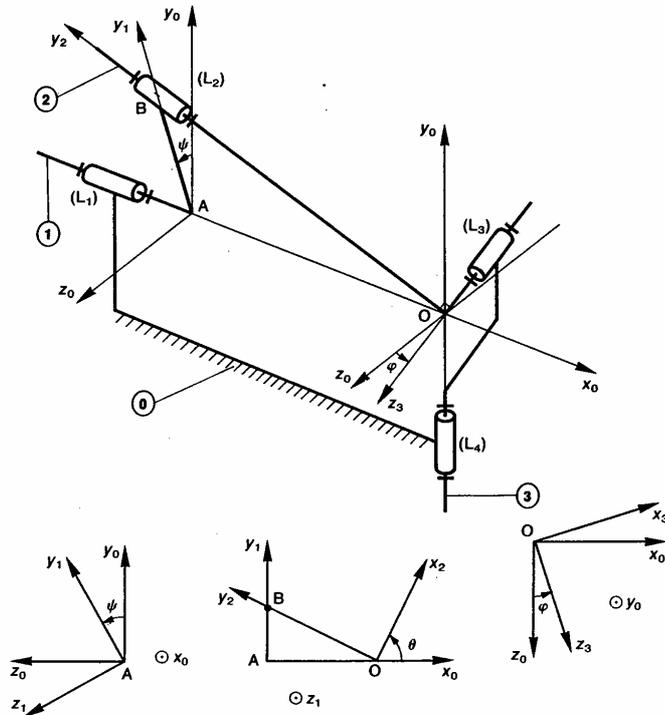


Fig. 42

leur d'engrais, situé dans un plan perpendiculaire à  $\vec{y}_0$ .  
Soit  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  un repère lié au bâti (0) de l'épandeur.

L'arbre (1) a une liaison pivot ( $L_1$ ) d'axe  $(O, \vec{x}_0)$  avec le bâti (0). Soit  $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  un repère lié à l'arbre (1). On pose :  $\vec{OA} = a\vec{x}_0$  ( $a > 0$ ) et  $\psi = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .

Soit B un point de l'arbre (1) tel que  $\vec{AB} = b\vec{y}_1$  ( $b > 0$ ).

Soit  $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  un repère lié à l'arbre (1) tel que le point B soit sur l'axe  $(O, \vec{y}_2)$ .

On pose :  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$  ( $\theta$  est constant).

La pièce (2) a une liaison pivot ( $L_2$ ) d'axe  $(O, \vec{y}_2)$  avec l'arbre (1).

L'arbre (3) a une liaison pivot ( $L_4$ ) d'axe  $(O, \vec{y}_0)$  avec le bâti (0). Soit  $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  un repère lié à l'arbre (3).

(3). On pose :  $\varphi = (\vec{z}_0, \vec{z}_3)$ . La pièce (2) et l'arbre (3) ont une liaison pivot ( $L_3$ ) d'axe  $(O, \vec{z}_3)$  telle que les axes  $(O, \vec{z}_3)$  et  $(O, \vec{y}_2)$  soient perpendiculaires.

**QUESTIONS**

1° Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme.

2° Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.

3° Déterminer la liaison équivalente aux trois liaisons en série ( $L_1$ ), ( $L_4$ ) et ( $L_3$ ) entre les pièces (1) et (2).

4° Déterminer, par une étude de liaisons en parallèle entre les pièces (1) et (2), la liaison par laquelle il convient de remplacer la liaison ( $L_2$ ) pour rendre ce mécanisme isostatique (on exprimera les torseurs dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ ).

8 — La figure 43 donne le dessin de définition du tripode d'un joint articulé.

Le schéma cinématique du montage permettant après avoir broché les cannelures, de réaliser simultanément les six centres d'usinage matérialisant les axes des trois tourillons, est représenté figure 44.

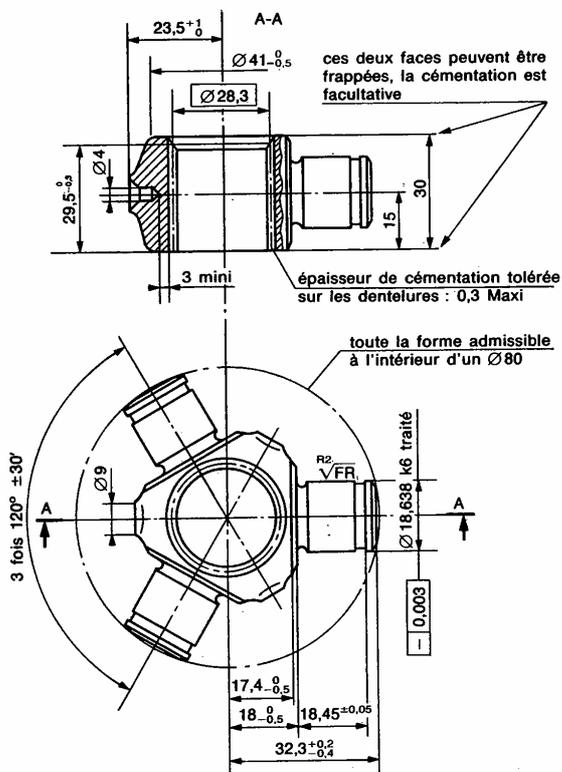


Fig. 43

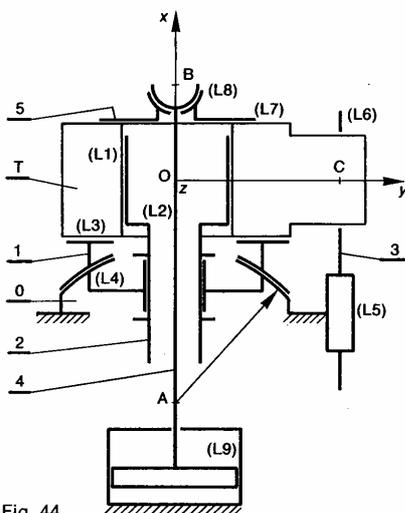


Fig. 44.

— Le tripode (2) est lié à la pièce (1) par la liaison glissière (L<sub>1</sub>) d'axe (O,  $\vec{x}$ ) par l'intermédiaire des cannelures.  
 — La pièce (2) est liée au bâti (0) par une liaison pivot (L<sub>2</sub>) d'axe (O,  $\vec{x}$ ).  
 — La pièce (1) est liée au tripode par une liaison appui plan (L<sub>3</sub>) de normale  $\vec{x}$ , et au bâti par une liaison rotule (L<sub>4</sub>) de centre A.  
 — Le vé axiale (3), lié au bâti par une liaison glissière (L<sub>5</sub>) d'axe (C,  $\vec{x}$ ) vient en contact, avec un des tourillons du tripode, suivant une liaison linéique annulaire (L<sub>6</sub>) d'axe (C,  $\vec{y}$ ).  
 — La pièce (2) est creuse et laisse passer la tige (4) du vérin de bridage. L'extrémité de cette tige est en liaison rotule (L<sub>7</sub>) de centre B avec la rondelle (5), elle-même en liaison appui plan (L<sub>8</sub>) de normale  $\vec{x}$  avec le tripode (2). Le piston est en liaison pivot glissant (L<sub>9</sub>) d'axe (B,  $\vec{x}$ ) avec le cylindre, lié au bâti par une liaison en castrament.

Le but de l'étude est de vérifier que ce montage est isostatique.

**QUESTIONS**

- 1° Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.
- 2° Montrer que la liaison équivalente à :
  - (L<sub>1</sub>) et (L<sub>2</sub>) est une liaison pivot glissant d'axe (O,  $\vec{x}$ ).
  - (L<sub>3</sub>) et (L<sub>4</sub>) est une liaison ponctuelle de normale (A,  $\vec{x}$ ).
  - (L<sub>5</sub>) et (L<sub>6</sub>) est une liaison ponctuelle de normale (C,  $\vec{z}$ ).
- 3° Montrer que la liaison équivalente à l'ensemble des liaisons (L<sub>1</sub>), (L<sub>2</sub>), (L<sub>3</sub>), (L<sub>4</sub>), (L<sub>5</sub>) et (L<sub>6</sub>), de mise en position du tripode par rapport au bâti, est une liaison complète et isostatique.
- 4° Montrer que la liaison équivalente à l'ensemble des liaisons (L<sub>7</sub>), (L<sub>8</sub>) et (L<sub>9</sub>), du système de bridage du tripode par rapport au bâti, est une liaison libre.

9 — Dans la scie sauteuse « Black et Decker » de figure 46, examinons l'hyperstatisme du mécanisme transformation du mouvement de rotation du moi en un mouvement de translation rectiligne alternatif d'axe perpendiculaire, de la lame de scie.

R(O,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ) est un repère lié au corps (1).

**QUESTIONS**

1° Dans une construction isostatique de la chaîne continue fermée (1)-(9)-(6)-(1) (voir figure 45), quel être le nombre de degrés de liberté de la liaison entre (6) et (9), si cette liaison doit interdire une rotation de la lame de scie autour de son axe (alors la mobilité de la chaîne continue fermée est  $m = 1$ ).

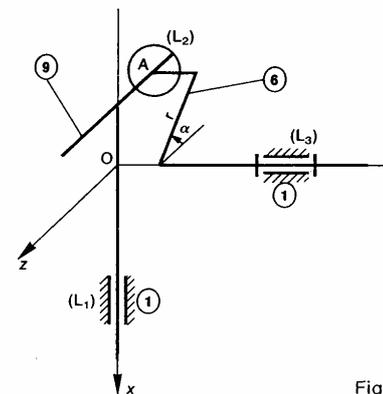


Fig.

(L<sub>1</sub>) : liaison pivot glissant d'axe (O,  $\vec{x}$ ).  
 (L<sub>2</sub>) : liaison pivot d'axe (O,  $\vec{y}$ ).

2° Tracer le graphe des liaisons entre les pièces (1), et (9).

3° Déterminer la liaison équivalente aux deux liaisons série (L<sub>1</sub>) et (L<sub>3</sub>) entre (6) et (9).

4° Dans une construction isostatique de la chaîne continue fermée (1)-(9)-(6)-(1), montrer par une étude statique de liaisons en parallèle, que le torseur statique de la liaison (L<sub>2</sub>) est de la forme, au point A, dans base de R :

$$\{G_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 & L_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

5° La liaison (L<sub>2</sub>) entre les pièces (6) et (9) est réel par l'intermédiaire de la pièce (8) (voir figure 48) qui introduit les liaisons suivantes :

(L<sub>4</sub>) : liaison appui plan de normale  $\vec{y}$ .  
 (L<sub>5</sub>) : liaison appui plan de normale  $\vec{x}$ .  
 (L<sub>6</sub>) : liaison pivot glissant d'axe (A,  $\vec{y}$ ).

a) Tracer le graphe des liaisons entre les pièces (6), et (9).

b) Déterminer la liaison équivalente aux deux liaisons en série (L<sub>5</sub>) et (L<sub>6</sub>) entre (6) et (9).

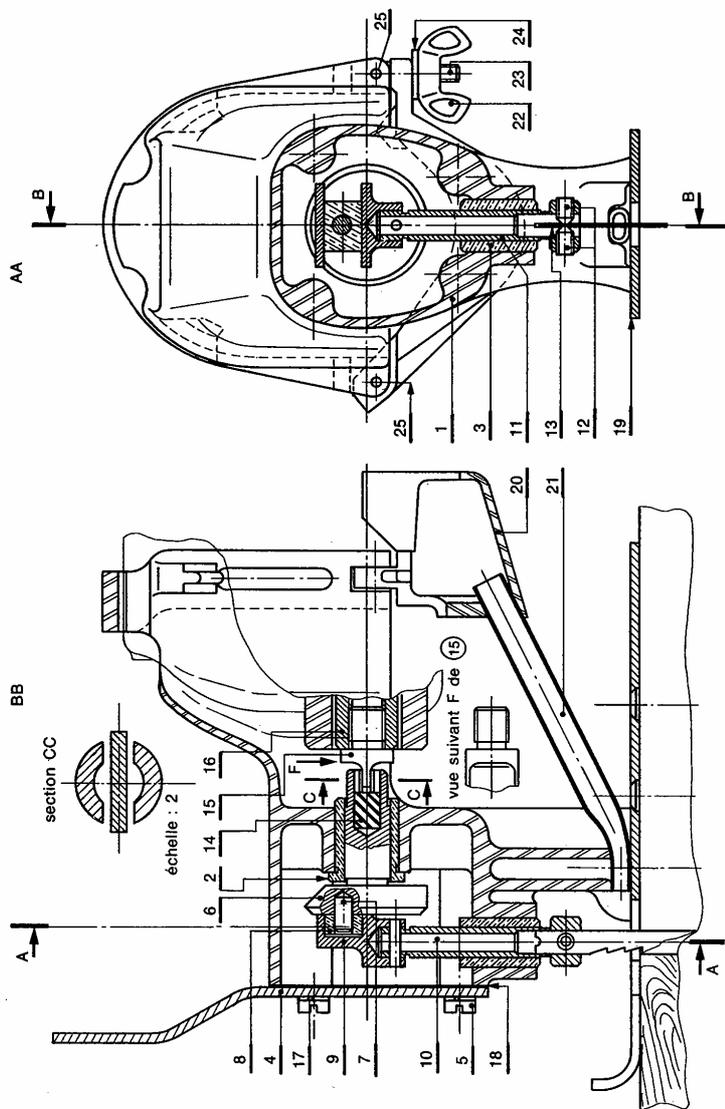


Fig. 46.

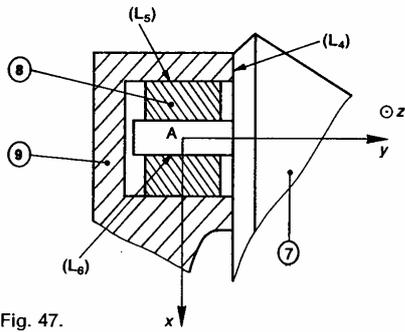


Fig. 47.

c) Déterminer, par une étude statique de liaisons en parallèle, le degré d'hyperstatisme, le(s) inconnue(s) hyperstatique(s), le torseur statique, de la liaison équivalente aux liaisons situées entre les pièces (6) et (9).

6° Déduire des résultats précédents le degré d'hyperstatisme et les inconnues hyperstatiques de la chaîne complexe constituée des solides (1), (9), (8) et (6).

7° Examiner sur le dessin proposé les solutions constructives adoptées pour se rapprocher d'une construction isostatique.

10 — Le dessin de la figure 48 représente le montage de perçage du trou  $\varnothing 5$  sur la pièce (P) dessinée traits mixtes fins.

Le canon de perçage (C) assure le guidage du fore. La mise en position et le bridage s'effectuent lorsque le montage est retourné.

**QUESTIONS**

1° a) Tracer le graphe des liaisons entre les pièces assurant la mise en position de la pièce (P) par rapport à la plaque support (1).

b) Modéliser ces liaisons.

c) Montrer que la liaison équivalente à ces liaisons et la pièce (P) et la plaque support (1) est complète isostatique.

2° a) Tracer le graphe des liaisons entre les pièces assurant le bridage de la pièce (P) par rapport à la plaque support (1).

b) Modéliser ces liaisons.

c) Montrer que la liaison équivalente à ces liaisons et la pièce (P) et la plaque support (1) est une liaison lit

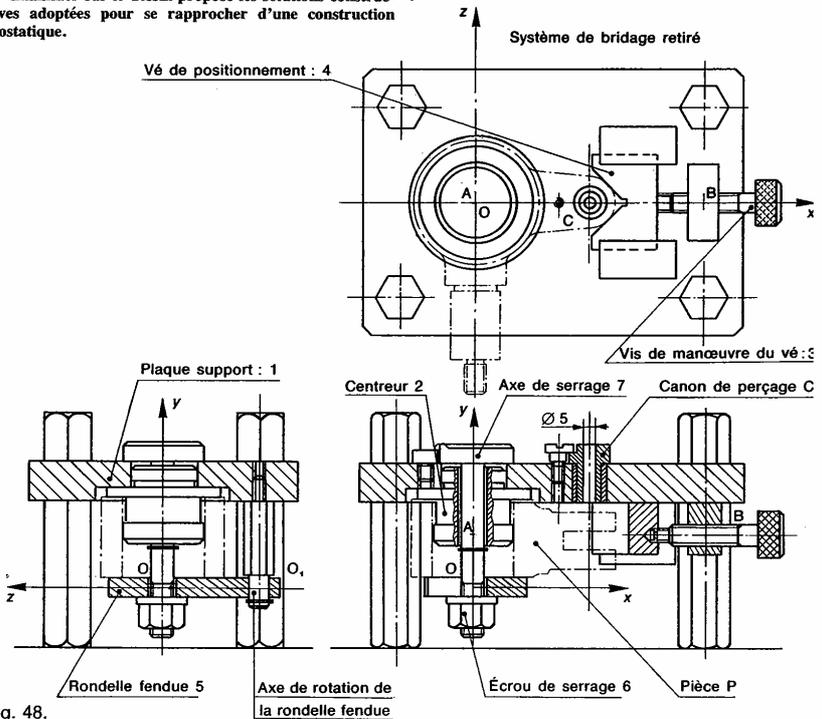


Fig. 48.